КОМИТЕТ ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МЭРИИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

ЭРНСТ ШУБЕРТ

НАЧАЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВАЛЬДОРФСКИХ ШКОЛ

(В ПОМОЩЬ ИЗУЧАЮЩИМ КУРС
«ВВЕДЕНИЕ В ЭДУКОЛОГИЮ»
РАЗДЕЛ «АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ»)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
1995

НАЧАЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ

Структура, предметная основа, антропологические принципы

В книгу включены две главы о неуспеваимости в математике и две игры для первого класса.

(пособие для классных учителей)

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для учителей, которые работают на основе антропософской педагогики, уроки математики часто относятся к наиболее трудным для преподавания предметам. Для одних собственный школьный опыт может затруднить антропологический подход, для других многочисленные инициативы Рудольфа Штейнера не дают цельного представления о возможной структуре урока. Из более чем 70-летнего опыта Вальдорфской школы развились различные пути, сосуществующие рядом друг с другом. Это многообразие отвечает степени ответственности, которую каждый учитель должен брать на себя за свой урок.

Нижеследующими заметками хотелось бы не уменьшать эту ответственность, а способствовать углублению преподавания математики с антропологической точки зрения, по возможности учитывая весь объем инициатив Рудольфа Штейнера. При этом естественно возникает противоречие с некоторыми существующими традициями, и прежде всего, в ориентации на последовательный и быстрый счет, в избежании рисунков при введении цифр, а также и в других местах.

Наряду с собственным опытом в изложение вошел опыт коллег, составивших мнение по описанной здесь методике курса и процесса обучения, самостоятельно использующих ее на практике. За это их хочется сердечно поблагодарить.

Автор надеется, что последующее изложение не будет восприниматься как догма. Более того, автор будет благодарен за критические высказывания, новые антропологические подходы и дополнения любого рода.

Мангейм, 1992

ПЕРВАЯ ЭПОХА МАТЕМАТИКИ

На самом первом школьном уроке в Вальдорфской школе мы говорим с детьми о том, зачем они ходят в школу. Мы доводим до их сознания, что взрослые обладают массой способностей, которыми дети еще не располагают, такими как письмо и чтение, счет, изготовление и чтение географических карт, владение иностранными языками и многими другими, благодаря которым человек ведет свою жизнь. После такой беседы детям представляются две основные формы: "прямая" и "кривая".

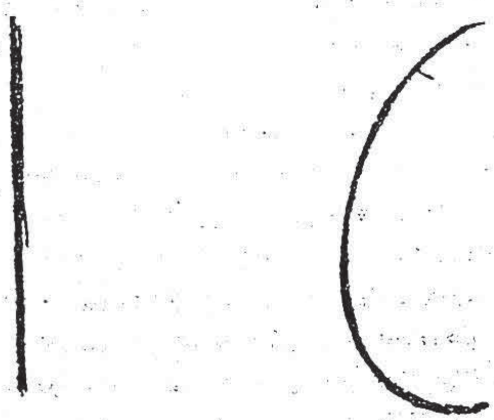


Рис.1

Исходя из этого была разработана первая эпоха рисования форм, во время которой дети тренируют собственное чувство формы, упражняются в подвижности руки, тем самым подготавливаясь к письму.

В течение второй эпохи мы вводим первые буквы. При этом формы согласных, благодаря выведению из рисунков, представляют достаточную возможность связать их свойства и формы. Абстрагируясь как остов из естественных форм, они сохраняют нечто из реальной жизни.

После этих двух эпох, проводимых осенью, может последовать первая эпоха счета. Здесь мы хотим описать ее возможную структуру, на которой об'ясняются существенные элементы. Каждый учитель должен найти свою собственную, подходящую ему и его классу форму. Примерное изложение поможет заключить общие идеи в конкретную форму.

ПЕРВЫЙ УРОК МАТЕМАТИКИ

В начале новой эпохи, следуя замечаниям Рудольфа Штейнера в Torquaj курсе[1], утром можно принести с собой в класс какую-нибудь хрупкую палку. Если перед этим - как это часто случается в Германии - были осенние каникулы или хотя бы выходные дни, то эпоха может быть начата введением, включающим вариации привычных форм и новый материал.

Первый совет - сосредоточить начало основного урока в первый день эпохи математики на самом необходимом, ограничивая себя, таким образом, приветствием, утренним изречением и лишь некоторыми элементами ритмической части. Эта рекомендация заслуживает внимания, так как позднее с числами следует еще раз поработать ритмически, в противном случае излишек будет слишком "ослабляюще" действовать на детей. В дальнейшем прохождении эпохи ритмическая работа с числами должна войти в ритмическую часть, занимая в пределах разумного самое большее полчаса. Следует также отказаться на некоторое время от нескольких уже разученных стишков и т.п.

После сокращенной ритмической части мы усаживаем детей и продолжаем мотив беседы первого школьного дня - как мы уже делали это в начале первой эпохи письма. Мы можем сказать примерно следующее: "Вы уже проучились некоторое время в школе, познакомились со многими формами и буквами, и ваши руки стали гораздо более умелыми, чем раньше. Теперь давайте начнем с чего-нибудь, что должны хорошо уметь взрослые, если они хотят уверенно чувствовать себя в жизни. Вспомните о ваших родителях, ведь они должны все продумывать, чтобы ваша семья действительно преуспевала. Вы, конечно, знаете, что ваши родители получают деньги, и также знаете, что на эти деньги можно купить различные вещи: хлеб, обувь, одежду, а еще автомобиль и многое другое. И все же нельзя купить сразу все, что может быть, хотелось бы. Вы уже заметили: родители покупают вам не все, что они хотели бы купить. Они покупают также не все, что хотели бы иметь сами. Это очень важно и хорошо, ибо они должны сначала обдумать, что нужно вашей семье. Знаете ли вы уже, что ваши родители должны оплачивать?"

1. Рудольф Штейнер. Искусство воспитания из понимания человеческой сущности. Библ. номер 311, 5-й доклад.
2. Рудольф Штейнер. Искусство воспитания. Методико- дидактические указания. Библ. номер 294, 4-й доклад.

Здесь дети могут что-то сказать сами: от еды и одежды до оплаты квартиры, отопления , электроэнергии и водоснабжения.

Подводя итог, можно продолжить таким образом: "Вы видите, что родители должны думать о многом, если они хотят быть хорошими матерью или отцом. Они должны обдумать, как *распределить* свои деньги, чтобы можно было оплатить все необходимое. О человеке, который умеет хорошо *распределять* деньги, говорят: *он умеет считать*. Есть еще один важный секрет: тот, кто хорошо распределяет, хорошо считает, всегда имеет немножко больше, и тогда он может что-то подарить, чтобы доставить кому-нибудь радость или помочь тем, кто нуждается в этом. Давайте теперь начнем изучать математику, которая играет в жизни большую роль, для того чтобы вы стали более дельными людьми".

В этой вводной беседе, которая не должна быть слишком длинной, затрагивается основной мотив преподавания математики в целом, который проще всего пояснить сначала на символическом рисунке: исходя из целого - здесь из дохода, имеющегося в распоряжении родителей - счет понимается как разделение или распределение (рис. 2). Этому следует противопоставить увеличение путем прибавления. Это можно изобразить следующим образом (рис. 3):

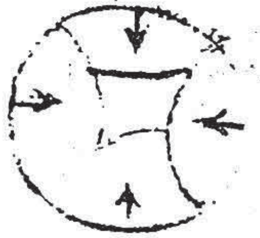


Рис .2

Рис. 3

Первый процесс является внутренним дифференцировани-ем, второй - это увеличение путем прибавления. В разделе "Аналитические и синтетические процессы" на этой противоположности остановимся более подробно.

После беседы с классом берем принесенную с собой хруп- кую палку, переламываем ее и говорим: "Посмотрите, я могу сломать палку на две части, но тебя , Аннелиза, или кого-нибудь другого я не могу сломать на двоих : *ты являешься единицей.* Для него я рисую такой знак":

Рис. 4

Здесь "прямая " первого урока появляется в новом значении. Если там она изображала вертикаль, которая представляла ребенка в конце первого года жизни с его образом в пространстве,

когда он поднялся на ноги, то теперь - бессознательно для ребенка - Я указывает на силу, создающую целостность, которую ребенок приобрел благодаря выпрямлению, и которая постепенно делала возможным противопоставление себя в качестве суб'екта миру об'ектов.

Антропологией описывается сегодня, какую роль играет сформированная для вертикальной ходьбы фигура с возможностями использования рук, развития способностей к говорению у гортани и высокодифференцированного мозга. Эти основные мо-тивы человеческого развития звучат, при изучении описанных ступеней.

Теперь снова вернемся к ребенку: "Ты, как и каждый из нас, представляешь собой единицу. Ты имеешь многое. Так, у тебя есть рука, которая может ощупывать и ко многому прикасаться. Только к чему-то одному она не может прикоснуться!" И дети приходят к тому, что рука не может прикоснуться к себе самой. Так же и с другими органами чувств: здоровый глаз не видит себя, ухо не слышит себя.

Таким образом, ваша рука не может прикоснуться к себе самой. Но у вас имеется две руки. Они могут прикасаться друг к другу. Они представляют собой двойку. Для нее мы делаем такой рисунок:

Рис. 5

Здесь затрагивается важный мотив развития человеческого сознания: двойственность целого ряда органов человека при их здоровом взаимодействии является предпосылкой ненарушенного развития. В диагностике раннего детского развития и в терапии с помощью гимнастики хорошо известна роль взаимодействия двусторонних органов движения от глаз до рук и ног. Праформа есть заложенное изначально самоприкосновение, являющееся условием здорового развития человека.

Образование четкой латеральности связанно с этим и давно находится в поле зрения психологов, занимающихся развитием. С ней связана координация движения, ее здоровое комплексное взаимодействие. На это мы обращаем внимание ребенка самым простым способом, указывая на соприкосновение рук как на образец взаимного отношения суб'екта - об'екта. Называются и другие двойки, которые можно обнаружить в человеке: два глаза, два уха, две ноги и т.д. Каждый парный орган в его взаимодействии имеет собственное значение для человеческого сознания и его отношения к миру. Рудольф Штейнер в курсе Torquaj дает толчок для важного расширения, которое выводит путем расчленения органических формирований: "Теперь идите дальше, вызовите второго ребенка и скажите: когда вы идете, вы также можете встретиться, можете соприкоснуться. Вы являетесь двойкой"[3]. При этом формирование двойки (двуединства) описывается в социальном, а не только в природном плане. Этим создается переход к совершенно свободному образованию двуединства, при котором мы в силу своего мышления собираем две вещи в одно единство и численно определяем как двойку. С точки зрения об'ектов это является "отмиранием", ибо когда мы определяем как двойку два камня или два стула, между ними больше не существует внутреннего живого отношения, как у рук, ног или глаз. С помощью нашего мышления мы понимаем как двойку и то, что может быть отнесено друг к другу путем абстрактного определения.

Переход к тройке мыслится Рудольфом Штайнером в виде простого добавления: "Сюда можно добавить еще что-нибудь. Правда пример с руками не подходит. И так можно перейти с ребенком к тройке"[4], и он рисует :

Рис. 6

Если тройку хотят представить также через расчленение, то можно обратиться к семье или к форме цветка, в которых содержится триединство. Однако как формирующий принцип она не встречается у человека в форме аналогичных органов.

3. Ср. сноску 1.
4. там же

Для понятия четверки Рудольф Штейнер обращается к животному: "...Ты наверняка видел собаку у соседа, у нее тоже только две ноги, как у ребенка? И вы подводите ребенка к знакомству с четырьмя прямыми в качестве опоры у соседской собаки (рис. 7), и так постепенно, беря примеры из жизни, можно научиться надстраивать число"[5].

При пятерке мы обращаемся к кисти руки. Вот это рука. На конце она расчленяется. Вы уже можете посчитать на ней пять пальцев. Для обозначения пяти или пятерки мы берем кисть руки. При этом показывают кисть с четырьмя сжатыми пальцами и оттопыренным большим пальцем, образуя таким образом римскую цифру пять (рис. 8).

Рис. 7

Рис. 8

Рис. 9

Итак, первые цифры вводятся как *единица, двойка* и т.д. и изображаются простыми знаками. То, что мы записываем цифру четыре в применяемых здесь римских цифрах чаще как IV (V минус I), не должно вводить нас в заблуждение. Она обозначалась и обозначается также и четырьмя прямыми.

Как в дальнейшем на практике будет происходить это введение на первых уроках математики, зависит от хода преподавания. Если придется рекомендовать резкое продвижение вперед - как в изложении Рудольфа Штейнера - необходимо все же принять во внимание достаточное душевное "переваривание" и временное ограничение этой фазы урока (примерно 30 минут!)

Затем цифры могут быть занесены в тетрадь. Под знаками оставляется столько места, чтобы позднее туда можно было вписать арабские цифры (рис. 9).

Если знаки для первых чисел уже записаны в тетрадь, то можно обсудить второй аспект числа: число как форма времени. Мы можем сказать примерно так: "Вы только что видели число два на примере рук, а теперь послушайте, как мы еще можем изобразить число два!"

5 там. же

Мы начинаем ритмично хлопать в ладоши V -, V -, V -.. Дети тоже хлопают в ладоши, но лишь после того, как мы тщательно покажем это при полном внимании класса. Затем показывается цифра три VV -, VV -, VV - ... и дети снова повторяют услышанное. То, что путем краткости или долготы возникает третий или четвертый такт, не противоречит узнаванию двойки и тройки в этом упражнении. Сюда включается широкая область упражнений, которыми следует заниматься в ритмической части последующих дней и эпох на протяжении года всякий раз на новых ступенях, и что с математической точки зрения приводит к прекрасным соображениям, которые Георг Глеклер в сфере Вальдорфской школы всегда обозначал как "ритмологическую математику". Сюда, например, относится на более высоких ступенях область непрерывных дробей с разработкой на основе астрономических ритмов и некоторых элементарных теоретико-числовых значений. Здесь закладываются первые ростки учения о ритмах, за которыми нужно заботливо ухаживать. Многие дети в начале испытывают трудности в ритмизации движений. Подготовкой для этого являются детские стихи и игры в хороводах, где ритмика связана с языком и музыкой. "Чистыми" ритмами следует заниматься именно на уроках математики. Они вносят в математику музыкальный элемент, математически пронизывая музыку.

После краткого на этот раз представления чисел ритмами мы переходим к счету, который к этому времени в значительной мере освоен большинством детей. На вопрос: "Кто из вас уже умеет считать до 20?",большинство детей поднимает руки, хотя это еще не означает, что они умеют это на самом деле. Но зная своих учеников, мы можем попросить некоторых уверенных детей громко посчитать, тщательно следя за тем, чтобы ребенок правильно закончил на 20. Такие методически формальные элементы являются существенной помощью, ибо как раз в ритмическом счете проявляется склонность к чрезмерной активности. Мало полезным было бы, например, просить считать до тех пор, пока ребенок умеет. При этом легко можно потерять остаток урока, разве только, противореча себе, остановить ребенка, который так быстро не захочет прекратить счет.

Если мы попросили посчитать некоторых уверенных детей, то можем попросить проделать это и более слабых. Если счету не уделялось достаточно внимания в подготовительных группах или дома, то нет ничего страшного в том, если дети будут пропускать или переставлять числа. Поправки или указания на ошибки здесь пока неуместны. Лишь параллельно мы отмечаем себе, были ли сделаны ошибки до числа 6 или 7. Это указало бы на скрытую слабость в математике, на которой позднее мы остановимся более подробно.

В конце этой части урока можно организовать общий счет, при котором более слабые дети поддерживаются группой.

Основной урок заканчиваем сказкой, которая по возможности глубоко затрагивает детей. Это относится в общем ко всей эпохе математики, которая сильно возбуждает детей своим содержанием и вызывает большую активность. Пересказ задушевной, слегка сдержанной сказки - как например, "Братец и сестрица" - создает определенную уравновешенность.

ОБЗОР ПЕРВОГО УРОКА МАТЕМАТИКИ

Если мы выделяем для основного урока время 110 минут, то при начале урока в 8.00 получается следующая структура урока:

8.00 - 8.10	Приветствие, утреннее изречение, сокращенная ритмическая часть
8.10 - 8.20	Беседа о математике
8.20 - 8.50	Понятия единицы, двойки... и первые римские цифры
8.50 - 9.00	Запись в тетрадь
9.00 - 9.05	Небольшой перерыв по обстоятельствам
9.05 - 9.25	Счет как ритмическая форма времени. Счет по отдельности и хором.
9.25 - 9.45	Сказка
9.45 - 9.50	Завтрак в классе

ВТОРОЙ УРОК МАТЕМАТИКИ

На второй день ритмическая часть может приобрести свою обычную продолжительность от 20 до 30 минут, однако ее основная часть должна быть отдана работе со счетом. В разделе об отстающих в математике, мы еще будем говорить о том, что собственный фундамент опыта для образования понятия числа и вообще для элементарных математических понятий лежит во внутреннем переживании *движения и равновесия.* Поэтому попытаемся по возможности разнообразно связать числа с движением так, чтобы они стали прямо-таки "танцующими". При этом следует постоянно держать во внимании два полюса деятельности: связь числа с физическим движением и внутренний процесс, сопряженный с переживанием движения. Один полюс служит для двигательной организации тела, которая одновременно является тренировкой чувства собственно движения и равновесия. Другой полюс связан с жизнью представлений и с выполняемыми внутри нее "осознанными" действиями.

В ритмическую работу с числами нужно постоянно включать оба эти полюса. Как правило, мы начинаем с волевой физической деятельности, сопровождая числа все новым видом движения, а именно топаньем, хлопаньем, прыжками, говорением и т.д. При этом одновременно тренируются ориентация корпуса и ловкость конечностей.

Переход к деятельности, более близкой представлению, мы осуществляем, производя более сдержанные движения, например, вместо ног дети двигают пальцами, меняем местами движение и говорение, сокращаем отдельные части движения, организовываем работу с группами детей, когда им приходится действовать и слушать попеременно, вызывая групповую и индивидуальную активность и, наконец, даем телу полностью успокоиться.

Этот переход полюса воли к полюсу представления должен осуществляться каждый час, ибо он характеризует общее развитие ребенка. Содействующим элементом является ритм. Переход, отнесенный к телесным органам мышления, чувств и воли, можно символизировать следующим образом:

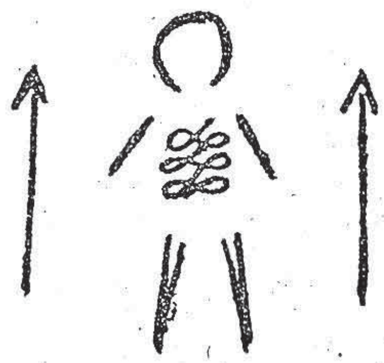


Рис. 10

Так же, как ребенок в старшем возрасте все больше и больше переходит от обучения через движения к обучению в представлениях и понятиях, так же и мы позволяем ребенку каждый урок - учитывая возраст и другие основные моменты - дышать между полюсами воли и воображения.
В конце ритмической части мы каждый раз внимательно следим за спокойным и сконцентрированным ее завершением. Одна коллега, например, рисовала геометрическую фигуру - круг или эллипс - и при сосредоточенном внимании класса предлагала довести ее до совершенства. Полный покой и концентрация необходимы до того, как начнется собственно "учебная часть".
Мы начинаем ее, записывая на доске одну за другой пройденные ранее цифры, и каждый раз спрашиваем у детей об их значении. Затем мы просим класс или отдельного ребенка запи- сать знаки для выученных чисел - можно только в воздухе, чтобы иметь возможность быстрого контроля. Если в первый день были обсуждены не все цифры, а лишь до V, то далее мы продолжаем начатый путь уже описанным образом.
Если в первый день мы дошли до V, начнем вводить араб- ские цифры, ссыла сь при этом на то, что взрослые обычно пишут цифры по-другому, не так, как мы учили вчера, но этот старый способ написания все еще применяется и поэтому его нужно знать. Мы тщательно рисуем первую цифру 1 на доске и просим сначала нарисовать ее в воздухе, затем просим нескольких детей написать на доске, и уже затем заносим в тетрадь. Цифры 2 и 3 требуют особой тщательности, так как их не так просто нарисовать. Подойдя к первым цифрам, мы просим записать их под римскими следующим образом:

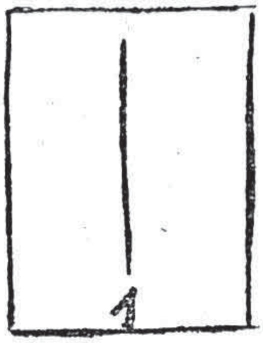


Рис. 11

Однако простого введения недостаточно. Так же, как с буквами, с формами цифр нужно упражняться, пока не появится достаточная уверенность в движениях. Тренировка должна производиться в классе, но такое задание ребенок может получить и на дом. При этом можно сказать: "Пишите на следующей странице 1 (2, 3...) до тех пор, пока у вас это не получится совсем хорошо. Завтра вы должны будете показать ваши самые красивые цифры".

После эпохи рисования форм и первой эпохи письма это в принципе не слишком трудно. Следует лишь хорошо продумать, как писать цифры красиво и бегло, ибо этот навык часто сохраняется на всю жизнь.

После занесения в тетрадь можно вводить "*числовые загадки*", побуждая детей с помощью различных чувств уметь определять количество. Примерами для этого, которые в младших классах могут изобретательно варьироваться, являются:

Чувство слуха: Производятся удары палочкой по различным предметам. Нужно определить число ударов.

Или: издается несколько ударов различных музыкальных тонов. Сколько было *разных* тонов?

Чувство осязания: Ребенок стоит перед классом и его слегка похлопывают по голове, спине или коленям.

Или: ребенок смотрит в сторону, а учитель зажимает ему несколько пальцев.

Или: ребенку завязывают глаза, и он должен сосчитать ногами камни.

Чувство осязания и тепла: Ребенку завязывают глаза. Неизвестное ему (небольшое) количество детей ходит вокруг него и пожимает руку. Нужно определить количество детей.

Чувство вкуса и запаха: ребенку завязывают глаза и предлагают попробовать различные образцы пряной пищи (хлеб, сыр, лимон и т.д.). Он должен определить количество различных вкусов пищи. (Например, предложено попробовать два кусочка лимона и три кусочка сыра одного сорта, тогда нужно назвать 2).

Чувство зрения: В течение непродолжительного времени показывается несколько пальцев.

Или: ставится задача определить количество различных цветов.

В этих упражнениях можно проявить массу изобретательности. Они предназначены в первую очередь для того, чтобы учитывать специфическую душевную ориентацию чувств отдельного ребенка. Кроме того, подобным образом, разными способами пробуждается чувство собственно движения, с помощью которого в конечном итоге мы производим определение числа. Здесь избегается связывание понятия числа с жестким чувственным представлением, как это, например, происходит со счетным палочками определенной длины и цвета, которые соответствуют определенному числу. Само число имеет основу опыта во внутреннем переживании движения и его сущности чужда любая внешняя связь через чувство. То, что такое чувственное соединение может удобно и легко передаваться, не должно служить аргументом в том случае, когда придают большое значение именно внутренней деятельности и соприкосновению с сущностью чисел.
После числовых загадок мы берем еще несколько упражнений на счет, потому что в ритмической части для них часто не хватает времени, обращая внимание на указанные активизацию и успокаивание тела. Урок завершает сказка.

Построение преподавания второго урока может служить моделью для всех уроков, не требующих перестройки из-за других важных событий. При этом в начале описанным образом вводятся и закрепляются римские цифры до V. Ясно, что речь не может идти о том, чтобы обучать соответствующим цифрам. Нормально развитый до поступления в школу ребенок знает их и уверенно их применяет. Содержанием обучения является способ их введения с помощью процесса членения, и введение первых цифр.
Я предлагаю очень быстрое введение арабских цифр. Как перечисление наизусть числительных, так и запись цифр являются в малой степени математической работой.

Преподавание математики безусловно должно вмещать эти традиционные элементы, ибо они необходимы для представления и понимания, но они не должны иметь слишком большой вес. Поэтому на введение цифр не следует тратить много времени.

Вторая причина быстрого введения цифр, *не* сопровождаемого наглядным изображением, как у буквенных форм, лежит в необразной, более склоняющейся к музыкально-ритмической природе понятия числа. В антропософских понятиях определяется: числа имеют инспиративный, а не имагинативный характер. Этому воздается должное во всех упражнениях, подчеркивающих ритмико-музыкальную сторону чисел. Наконец, в основе понимания количества размещенных в пространстве вещей лежит процесс движения.

ПЕРЕХОД К ДЕСЯТКАМ

После того как будут введены и закреплены римские и арабские цифры от 1 до 5, можно вводить соответствующие цифры от 6 до 10. В принципе это можно в течение первой недели. Для введения римских цифр теперь к первой руке добавляется вторая. Римская цифра X изображается двумя скрещенными руками.

В арабских цифрах в связи с позиционной системой счисления при введении второй позиции возникает проблема перехода к десяткам. Это можно об'снить следующим образом: "Если считать до тех пор, пока хватает пальцев - а раньше люди часто считали по пальцам - тогда отсчитанные пальцы собирают в "мешок" - 10. Здесь ноль является знаком мешка. Два мешка тогда будут обозначать 20 и т.д. Если чего-то имеется больше 10, то остается сверх: 11, 12, 13 и т.д. В конце знак "мешка" пишут только тогда, когда ничего не остается. Так мы постепенно переходим к тому, чтобы записывать числа 11, 12, 13 и т.д. Число десятков показывает, *сколько раз мы досчитали до 10.* Если предметы считаются также с помощью единиц в десятичном числе, то они показывают, что насчитано до 10. Соответствующим образом затем нужно будет провести переход к сотням, тысячам...

6 - При так называемом одновременном восприятии числа имеют дело либо с известным геометрическим рисунком - как у точек кубика для игры в кости - либо число воспринимается по запечатленному изображению, как по внешнему восприятию.

Рис. 12

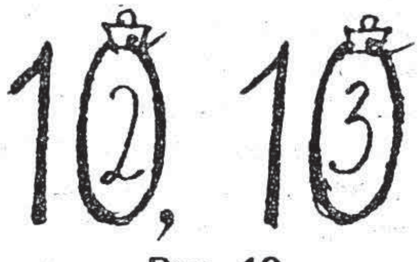


Рис. 13

ОБЩАЯ СТРУКТУРА ПЕРВОЙ ЭПОХИ

Первая эпоха математики может содержать уже все элементы, которые далее, в течение первых двух лет обучения будут тренироваться более подробно и в расширенных числовых пространствах. А именно:

- Введение римских и арабских цифр
- Счет
- Знакомство с дециметрами
- Числа как пространственное расположение и ритмическое оформление
- Арифметические действия по отношению к темпераментам
- Упражнение на отгадывание числа
- Диагноз и лечение при арифметической неуспеваимости

Кроме того, уже во время первой эпохи математики учитель может определить слабые места отдельных учеников и начать работать с ними терапевтически.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Основным содержанием первых эпох математики является введение и закрепление арифметических действий. В Вальдорфской педагогике этим действиям уделяется столь же большое внимание, как и в других педагогических системах. Ниже излагается подход Рудольфа Штейнера к преподаванию арифметических действий, при котором у учащихся с учетом их темперамента, вырабатываются определенные душевные переживани в отношении каждого из действий[7]. Поясним сначала структуру этих действий и соотношение между ними[8].

7. Рудольф Штейнер. Искусство воспитания. Обсуждения на семинарах и доклады по учебной программе. Библ. номер 295, обсуждение на 4-ом семинаре.
8. Ср. Луис Лоше-Эрнест. Арифметика и алгебра. Дорнах, 1984 год.

СТРУКТУРА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Если мы сложим два числа, например, 7 + 5, 3 + 4, 2 + 3, то оба слагаемых будут иметь различную функцию. Первое число будет увеличиваться за счет второго. Первое число показывает состояние, второе - изменение. Поясним разницу между ними на утрированном примере. Допустим, у человека есть 1 марка (рубль) и он получает 1 миллион марок; у другого человека есть один миллион марок и он получает одну марку. Вероятно, уже по сердцебиению можно легко представить себе разницу между обоими процессами. Следовательно, можно утверждать, что 1 + 1000000 не идентично 1000000 + 1. Математический знак равенства говорит лишь о совпадении конечных результатов, сами же процессы могут отличаться. Дать общую характеристику такому подходу к действию сложения возможно с использованием понятий "пассивно", "активно" и "результат". Первое слагаемое, т.е. число, которое увеличивают, является *пассивным*. Второе слагаемое *активно* увеличивает первое число. После проведения действия возникает *результат*. Обозначим вышеназ ванное буквами "р" - пассивно, "а" - активно, "r" - результат. Символически это выражается следующим образом:

$$p + a = r$$

Из трех этих чисел соответственно могут быть заданы два. Следовательно, кроме суммы имеются два "обращения". Если оказываются заданными состояние "р" и результат "r", то изменяющее значение а может определяться следующим образом:

$$p + ? = r \quad \text{или} \quad r \mid p = a?$$

Вертикально проставляемый знак минус мы применяем для того, чтобы отличать "образование разницы" от собственно вычитания. Вопросами, направленными на нахождение "а", могут быть, например:

- даны числа "r" и "р". Насколько велико различие?
- дано "р" Сколько не хватает, чтобы получить "r"?
- Было "r", осталось"р". Сколько потеряно?

Если же известны "r" и "а", то можно определить "р". Это и будет собственно вычитанием:

$$? + a = r \quad \text{или} \quad r - a = p?$$

Соответствующими вопросами являются:
- От "r" отнимается "a". Что остается?
- К какому числу мы должны прибавить "a", чтобы получить "r"?

Естественно, вопросы мы в обоих случаях можем сформулировать различными способами. При нахождении решений дети будут мыслить по-разному в зависимости от постановки вопроса. Этот материал нам еще предстоит обсудить. Но прежде обобщим вышесказанное:

Активное обращение	Действие	Пассивное обращение
	Сложение $p + a$	
Вычитание $r - a = p$		Образование разницы $r \mid p = a$

Формально вычитание и образование разницы можно отождествить, так как при сложении обычных чисел результат не зависит от последовательности слагаемых (переместительный или коммутативный закон). Однако в более сложных математических действиях переместительный закон имеет силу столь же редко, как и в жизни. Поэтому всегда важна последовательность мер или событий!

От сложения мы за два шага переходим к умножению:

Первый шаг: Вместо двойных сумм рассмотрим суммы нескольких слагаемых:

$$r = a + b + c + d + \ldots$$

Второй шаг: Среди сумм нескольких слагаемых существуют такие, в которых все слагаемые равны:

$$r = \underset{a}{p + p + p + \ldots + p}$$

Следовательно, если теперь мы задаем слагаемые "p", то определяем их число "a" и рассматриваем "r" в качестве величины, кратной величине "p" в "a" раз:

$$r = a \cdot p \quad \text{или} \quad a \cdot p = r$$

Тем самым возникает произведение с двумя сомножителями "а" и "р". Различие "а" и "р" становится особенно отчетливым, если "р" (а таким образом и "r") мы будем рассматривать в качестве именованной величины, т.е. например:

$$12м = 3м + 3м + 3м + 3м$$
$$12м = 4 \cdot 3м$$

Цифра 4 указывает число равных слагаемых, каждое из которых - по 3м. Оно является безразмерным числом в отличие от "r" и "р", которые являются именованными величинами. И вновь переместительность (коммутативность) сомножителей относится к результату, а не у процессу умножения. Так мы имеем $3 \cdot 4м = 12м$, но и $4 \cdot 3м = 12м$. Если представить себе, например, балки, то очевидным станет, что три балки по 4м, будут использоваться иначе, чем четыре балки по 3м!

Таким образом, в произведении $a \cdot p = r$ "а" является умножающим активным сомножителем, а "р" - пассивным сомножителем. "а" - это *множитель*, "р" - *множимое*.

Как и при сложении, при умножении мы можем образовать два обращени . Кроме "а" и "р" могут быть заданы либо "а" и "r", либо "р" и "r". Если заданы результат "r" и множимое "р", то мы отыскиваем активный множитель, который показывает, сколько раз "р" повторяется в "r". Рассуждая предметно, мы можем представить себе две длины. Мы ищем, сколько раз меньшая длина входит в большую. Следовательно, мы измеряем большую длину, взяв меньшую в качестве единицы измерения. Их отношение дает искомый результат[9]. Действие, при котором из "r" и "р" определяется "а", назовем *измерением* или *образованием отношения*. Если мы применяем именованные величины, то из двух однородных величин получаем безразмерную относительную величину.

Если заданы результат "r" и множитель "а", то мы имеем дело с собственно *делением*: целое следует разделить на заданное число равных частей, после чего определить величину получившихся частей. В случае именованных величин исходное число "r" мы должны разделить на безразмерное число "а", в результате чего получим величину "р", однородную исходной величине "r".

При *измерении* или *образовании отношения* запишем:

$$? \cdot p = r \quad \text{или} \quad r : p = a?$$

Вопросы здесь могут звучать следующим образом:

- Каково отношение "r" и "р"?
- Заданы целое "r" и часть"р". Сколько раз "р" содержится в "r"?

9. Здесь не затрагивается вопрос о нецелых или иррациональных отношениях.

- Задано "p". Несколько "p" составляют целое "r". Сколько раз мы должны взять "p", чтобы получить "r"?

При *делении* запишем:

$$a \cdot ? = r \quad \text{или} \quad r \mid a = p?$$

Вопросами при делении будут:
- "r" разделяется на "a" равных частей. Какова одна часть?
- Какую исходную целую величину "r" получаем мы при умножении величины "p" на "a"?

Как и раньше различным способом сформулированные вопросы будут пробуждать у детей различные процессы мышлени.

Обобщая вышесказанное получим:

Активное обращение Действие Пассивное обращение

Сложение
$p + a$

Вычитание
$r - a = p$

Образование разницы
$r \mid p = a$

Два шага от сложения к умножению

Умножение
$a \cdot p = r$

Деление
$r / a = p$

Образование отношения
$r : p = a$

Формально можно снова отождествить деление и образование отношения, так как на основании переместительного закона множимое может рассматриваться в качестве множителя и наоборот, не изменяя при этом результата. Однако с точки зрения сути процесса, как и при образовании разницы и вычитании, приходится иметь дело с различными действиями. Таким образом два действия, обратных умножению, должны иметь формальное различие.

От умножения мы за два шага можем еще раз перейти к действию более высокого уровня - возведению в степень.

Первый шаг: Вместо двучленного произведени рассмотрим многочленное:

$$r = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \ldots$$

Второй шаг: Среди многочленных произведений особо выделим такие, в которых все сомножители равны:

$$r = p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p$$

$$a$$

Теперь подсчитаем множители, т.е. определим их число "a" и рассмотрим "r" как число "p", возведенное *в степень* "a". Запишем: $r = p^a$. Возводимое в степень число "p" называется *основанием степени* или *базисом*, число "a" - *показателем степени.*

Первой "достопримечательностью" при возведении в степень является то, что показатель степени и основание больше не могут произвольно подвергаться перестановке. Так имеем:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9, \text{ но } 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Следствием этого является то, что и два обратных действия оказываются существенно различными. Как и в ранее описанных случаях, мы получаем их задавая один раз "r" и "a" и один раз "r" и "p", каждый раз ставя вопрос в отношении третьего числа. Если заданы "r" и "p", то, следовательно, отыскивается показатель степени "a", в которую следует возвести "p", чтобы получить "r" :

$$p^? = r$$

Это действие, при котором запрашивается показатель степени, называют *логарифмированием*, причем записывают:

$$\log_p r = a$$

Читается это как логарифм "r" по основанию "p". Другим активным обращением является *извлечение корня*. При извлечении корня из числа спрашивается о числе "p", которое при возведении в степень "a", дает "r":

$$?^a = r$$

После нахождения искомой величины "p" записываем:

$$\sqrt[a]{r} = p$$

и читаем: корень "a"-той степени из числа "r".

Вопросами, относящимися к обоим действиям возведения в степень, являются:

При логарифмировании:
- Какое число является логарифмом числа "r" по основанию "p"?
- Заданы целое "r" и основание "p". Сколько сомножителей "p" составляют "r"?
- Дано "p". Следует образовать "r" как степень от "p". Сколько раз следует взять "p" в качестве сомножителя?

При извлечении корня:
- Целое "r" следует разложить в произведение "a" равных сомножителей. Каким должен быть каждый сомножитель "p"?
- Какое число "p" нужно возвести в степень "a", чтобы получить "r"?

Возможны такие другие формулировки.

Теперь сведем воедино девять полученных арифметических действий и получим:

Активное обращение | Действие | Пассивное обращение

Сложение
$p + a$

Вычитание	Образование различия
$r - a = p$	$r \mid p = a$

Первая ступень

Умножение
$a \cdot p = r$

Деление	Образование отношения
$r / a = p$	$r : p = a$

Вторая ступень

Возведение в степень

$$p^a = r$$

Извлечение корня	Логарифмирование
$^{a}r = p$	$\log_p r = a$

Таким образом, представлены все элементарные арифметические действия в их взаимосвязи. Естественно, можно задать вопрос, почему такими же способами не могут образовываться действия еще более высокого уровня? Принципиально это возможно, однако надо иметь в виду, что некоторые алгебраические законы перестают при этом действовать, подобно тому, как закон коммуникативности уже утратил силу в случае возведения в степень. До тех пор, пока новые области приложения не потребуют таких структур, они практически не рассматриваются[10].

Следует еще упомянуть о том, как подобная структура девяти арифметических действий упрощается в процессе дальнейшего обучения математике:

1. Благодаря применимости закона коммуникативности для сложения и умножения - о чем уже упоминалось выше - имеется возможность отождествить вычитание и образование разности или, соответственно деление и образование отношений.
2. Посредством подстановки отрицательных чисел формально вычитание можно свести к сложению отрицательных чисел; следовательно, вместо вычитания "a - b" складывают "a+(-b)".
3. Подобно этому посредством подстановки дробей деление может заменяться умножением на обратное число:

$$a : b = a \cdot 1/b$$

4. С помощью дробных показателей степени извлечение корня можно свести к возведению в степень:

$$^{a}r = r^{1/a}$$

Тем самым постепенно достигаем уменьшения числа действий с 9 сначала до 7, а затем - и до 4:

10. В современной математике и физике интерес представляют некоммуникативные и неассоциативные структуры.

Первоначальные действия	1-ое упрощение	2-ое упрощение
Сложение	Сложение	Сложение
Образование разницы	- - -	- - -
Вычитание	Вычитание	Вычитание
Умножение	Умножение	Умножение
Образование отношения	- - -	- - -
Деление	Деление	- - -
Возведение в степень	Возведение	Возведение
Логарифмирование	Логарифмирование	Логарифмирование
Извлечение корня	Извлечение корня	- - -

Вновь обратимся теперь к первоначальному обучению счету и рассмотрим общую структуру арифметических действий.

ВВЕДЕНИЕ ПЕРВОГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ В ПЕРВОМ КЛАССЕ

При введении чисел мы исходили из расчленения целого. Этот аналитический процесс мы продолжаем теперь при вводе арифметических действий посредством того, что единство (количество) мы воспринимаем то целым, то расчлененным. Прежде, чем мы проделаем это с маленьким числом, доступным для понимания детей, продемонстрируем принципиальный процесс с большим числом, чтобы дети убедились в способностях учителя делать то, что они сами еще не умеют[10а]. Затем мы можем еще раз вернуться к пятерке и руке. В начале "учебной части" скажем и покажем: смотрите, это рука. Она разделяется на пять пальцев. Однако, как же появляется пять? Это четыре и один. Вместе это пять, при расчленении же имеем четыре и один. Четыре и один вместе вновь дают пять.

Рис. 14

Затем покажем на пальцах, что пять может также образовываться как 1 и 2 и 2; 1 и 2 и 2 вместе вновь дают 5.

10а. см. сноску 2, 1-й доклад

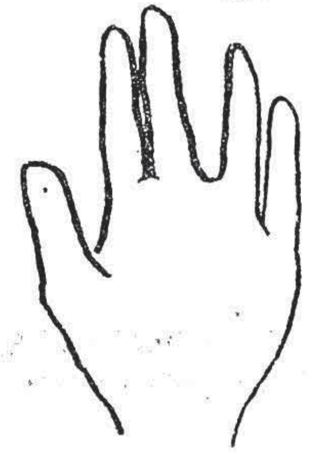


Рис. 15

Теперь попросим детей самих показать различные варианты пятерки. Таким образом, мы получаем первое арифметическое действие в виде *аддитивного расчленения*, в виде аддитивного *анализа* числа. Посредством синтеза вновь можем получить первоначальное число, состоящее из частей. Этот расчленяющий анализирующий счет, который на втором этапе вновь становится об'единяющим (синтезирующим) счетом, мы можем в дальнейшем провести с использованием чисел и без помощи руки.

Для постановки задачи в письменном виде на этом этапе оказывается достаточным написать одно число в середине страницы и под ним - различные расчленения, например:

7
1 5 1
3 4
2 3 2
1 2 1 2 1
6 1

Суть этого процесса - исходя из целого, определить части - имеет для всей анропософской педагогики столь основополагающее значение, что в дальнейшем мы коснемся этого вопроса еще более подробно. Теперь заметим, насколько отличается работа с классом в зависимости от того, занимаемся мы анализом или синтезом.

Если детям предлагаются задачи на сложение, например, 7 + 3 = ? или 2 + 9 = ? или 4 + 3 = ? и т.п., то на каждый вопрос имеется только *один* правильный ответ. Учитель должен лишь сравнивать ответы учеников с этим, уже известным ему решением. Следовательно, здесь имеет место лишь принципиальный контроль правильности/неправильности.

Совершенно иначе строится совместная работа учителя и ученика, когда задается вопрос: что такое 16? или же: что такое прекрасное число 16? Сколько правильных ответов допускает этот вопрос! Вот некоторые из них:

16
8 8
4 4 4 4
3 4 2 4 3
15 1
12 4
1 2 3 4 3 2 1

Насколько иначе должен теперь вести себя учитель, когда он прислушивается к тому, как отвечают ученики! Если заданное число не слишком мало, то проверка каждого ответа требует от учителя расчетов. Таким образом, вместо того, чтобы просто сверять ответы с правильными, он сам становится основным вычислителем в классе!

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Из такой постановки задачи ребенок может вывести для себя весьма существенный урок в методическом плане: один вопрос *может*, даже *должен* предусматривать много ответов. В ответ ребенок может вложить свое индивидуальное видение, и если мы хорошо знаем детей, то видим, насколько сущность ребенка отражается в его ответе. Часто для всего класса оказывается удивительным, сколько решений придумывает ребенок, причем кто-то из детей признается, что сам он не смог бы дойти до этого. Разумеется индивидуальная свобода выбора решения поддерживается оценкой коллектива. Мы свободны в выборе решения, в своей позиции. Когда же мы произнесли это решение, то оно может *всеми* проверяться на правильность[11].
В этом заключается принципиальная сторона методики: извне и изнутри перед людьми ставятся проблемы. Почти всегда они требуют более, чем одного ответа, ибо каждый новый аспект обогащает понимание проблемы и требует новых ответов. Давайте рассмотрим несколько гипотетический пример.

11. см: Рудольф Штейнер. Духовно-душевные силы искусства воспитания. Библ. номер 305, 1-й доклад.

Представим себе парламент, в котором собрались представители народа, обученные подобными методами, где обсуждается проблема безработицы. Вместо имеющей силу истины, которую должно было бы представлять собственное мнение одной из сторон, стали бы выдвигаться взаимные требования о дополнительном разбирательстве новых последующих точек зрения: точки зрения молодых, старых людей, людей, имеющих право на самоопределение, и не имеющих его, работающих людей, позиции женщин, имеющих семьи и не имеющих их, людей, урезанных в правах и т.д. стали бы находить свое выражение совместно с высказываниями представителей банков, специалистов в области автоматизации и т.п. Быстрые ответы стали бы препятствовать тому, чтобы тот, кто все еще находится в особой жизненной ситуации, смог бы увидеть широту и многогранность проблемы, в результате чего у него возникает слишком узкое суждение, причем он не считается с мнением коллектива. "Концентрированными действиями", "организацией круглых столов", заслушиванием экспертов и т.п. пытаются определить многообразие проблем, вытекающих из существа дела. Однако, сколько же подходов к решению проблем остается в тени, так как индивидуальные суб'екты выносимых решений имеют столь мало навыков учета многообразия мнений.

Можно было бы предлоложить, что в проходящих дискуссиях (что также часто имеет место) можно будет узнать о новых всевозможных путях решения вопросов, однако, условия остаются такими, как они есть, ибо в этом отношении ничего изменить нельзя. "Это так же, как 2 + 2 = 4", и в этом ничего нельзя изменить. О каком творчестве в математике может идти речь, если одно из основных математических выражений применяется дилетантами в качестве символа однозначности и безальтернативности. Естественно, если бы людей учили тому, что $2 + 2 = 4$, но и $1 + 3$ и $1 + 1 + 1 + 1$, то они могли бы заметить, что синтетический счет выступает бессознательно в роли принудительно навязываемого событи в их жизни. Благодаря же расчленяющему счету можно было бы выработать основное ощущение в отношении индивидуальной свободы и коллективного суждения.

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ

Вышеописанный подход может также рассматриваться в более широких рамках. Когда спрашивают, где же в мире можно найти анализ и синтез, то следует обращаться к способам возникновения органических и технических об'ектов. Если создается, к примеру, автомобиль, - то имеет место раздельное изготовление частей, которые потом собираются (синтезируются) на различных ступенях производства. Совсем иные образования осуществляются в органической сфере. Из относительно единообразных первичных клеток посредством внутреннего дифференцирования происходит развитие с получением структур более высокого порядка. Сначала жизненные функции осуществляются совместно, с учетом единообразной ткани. Затем появляются зачатки органов, дифференцированные в ходе дальнейшего развития, на которые по истечении некоторого времени "накладываются" специальные функции.

Если попытаться мысленно поменять местами органический и технический способы развития, то получим следующее. Организм производится посредством раздельного изготовления органов с их последующей сборкой. Напротив того, автомобиль создается из относительно единообразной субстанции посредством дифференцирования на аккумуляторы, шины, свечи зажигания и т.п. Эти утрированные представления могут еще сильнее донести до нашего сознания противоположность данных подходов.

Свойством любого аналитико - органического развития является отношение каждой части к целому. Если мы попытаемся представить себе отдельный орган всего организма, то это удается нам лишь в том случае, если мы соотнесем его ко всему организму. Нервы, желчь, селезенка и т.п. становятся понятными нам с учетом всего организма и применительно к организму, которому они принадлежат. Это означает, что мы должны развивать *целостное мышление*, распространяющееся от целого к частям. При любом познании органического целого или - как заявляют Матурана и Варела[12] - аутопоэтической системы целое должно оставаться на заднем плане. Неизбежное взаимодействие этих форм мышления с живыми существами, не в последнюю очередь подтверждается разрушением нормальных взаимодействий с природой, которая за последние 150 лет все более и более рассматривалась с позиций только технического мышления. Это мышление допускает насильственное изменение живой природы так, как будто она неорганическая. Обращаться с природой таким образом, это и означает делать ее неорганической, т.е. мертвой. То, что это прежде всего, является следствием недоразвитых возможностей мышления, еще недостаточно осознается в школьной практике. То, к чему стремится антропософская педагогика, заключается не в призывах на тему общения с живой природой, а в конкретной выработке новых форм мышления[13].

12. Ср. Матурана Х./ Варела Ф. Дерево познания. Берлин, Мюнхен, Вена, 1987 год.

13. В качестве теоретической поддержки по вопросам познания для развитых здесь мыслей следует настоятельно указать на раннее произведение Рудольфа Штайнера "Основы теории познания мировоззрения Гете", в частности, на главу, посвященную органической и неорганической природе.

Следует еще добавить, что в *идеальном* - не материальном возникновении технического предмета, т.е. в мышлении изобретателя, происходит процесс, соответствующий органическому становлению. Изобретение никогда не возникает из отдельных изобретений, ибо в начале есть смысл и цель общего. Все требуемые при этом отдельные процессы изготовления выполняются затем в отношении этого целого. У самобытных изобретателей мы как раз обнаруживаем целостное мышление, при котором лишь вторично развивается интерес к каким-то, несомненно важным в конечном итоге, деталям.

Эти выводы были бы неправильно истолкованы, если бы с противопоставлением аналитического и синтетического мышления связывалась бы оценка и выбор "лучшего". Обе формы мышления имеют свою подобающую сферу применения. Подчеркивание нами преимуществ целостно анализирующего мышления вызвано лишь явным преобладанием в настоящее время признаков аддитивно-синтезирующего мышления.

При обращении с обеими формами мышления в педагогике необходимо учитывать, что ребенок постоянно прислушивается к органическому миру и первые осознанные шаги при обучении приходятся у него на возраст, когда завершаются процессы дифференцирования органов в его собственном организме[14]. В антропософской педагогике мы пытаемся с использованием форм мышления, применяемых в преподавании математики, прежде всего прибегать к образующим органическим процессам и только после этого обучать синтезирующему мышлению.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Если с учетом вышесказанного мы рассмотрели сложение посредством расчленения подсчитанного целого и обратились к синтезу частей для образования целого, то это с одной стороны было продиктовано тем, что упражнения с обеими операцими проводится, по возможности, с разнообразными материалами - каштаны, камешки, деревянные палочки и т.п., а с другой, что приведение практическх примеров оказывается желательным в возможно раннем возрасте. Небольшие, связанные со счетом, истории могут прояснить ситуации, при которых возникают задачи, требующие расчленения.

14. Ср. Эрнест-Михаэль Краних. Силы для физического формообразования и их превращение в способность фор-мировать и переживать формы. См. Юнеманн М. и др. Рисование форм. Развитие чувства формы в воспитании. Штутгарт, 1992 год.

Вскоре после начала рассмотрения аналитического и синтетического сложения мы ищем переход к прочим элементарным арифметическим действиям. Для образования разницы, в качестве предварительного упражнения, мы можем провести полюбившуюся игру "изменение количества пальцев" как особый случай вышеописанной операции, связанной с изменением количества чисел: ребенок смотрит в сторону, а мы зажимаем несколько пальцев и спрашиваем об их количестве. Это оказывается хорошим упражнением для того, чтобы сконцентрировать внимание ребенка на пальцах[15]. За этим первым вопросом следует второй: а сколько пальцев *не* зажал? Естественно, что это число ребенок может просто посчитать, как и первое, но мы просим его исходить из целого изначально определенного числа: в целом имеется 10 пальцев, зажато, например, 6; тогда *не* зажато 4 пальца.

Собственно образование разницы обычно становится основной темой примерно на третью неделю первого этапа обучения. Для этого мы рассказываем, как ребенка послали купить яблоки. Ребенок получает денежную купюру достоинством 10 марок. Яблоки стоят 4 марки, и ребенок правильно получает сдачу 6 марок. Он быстро бежит домой, зажимая в одной руке кулек с яблоками, а в другой - деньги. Вдруг раздается звон, ребенок останавливается и смотрит на свою руку с деньгами, в которой он обнаруживает лишь две марки. Здесь он замечает, что на дороге лежат деньги и подбирает их. Нужно ли ему искать еще? Если он не знает, то непонятно, когда он должен прекратить поиски. Если что-либо потеряно, то всегда хорошо, если известно, сколько потеряно. Если найдено не все, то поиски можно продолжать более интенсивно.

Собственно вычитание может обсуждаться в качестве второго этапа. Если из 6 марок ребенок теряет 4, то остается 2. В первом случае по первоначальному "г" и новому состоянию "р" узнается изменяющее значение "а", во втором - из целого "г" и потери "а" определяется новое состояние "р". В первом случае узнают отношение между двумя заданными состояниями, т.е. разницу, во втором - результат вычитания.

Теперь перейдем к *измерению* или *образованию отношений*. При этом также установим взаимосвязь между двумя заданными величинами. Подготовка заранее проводится нами в ритмической части, что делается посредством выполнения ритми-

15. В определнных случаях сложность, связанна со счетом, вызывается пальцевой агнозией. См. также внутреннее осязание тела в изложении Э.М.Краниха. Раннее математическое воспитание в дошкольном возрасте как педагогико-психологическая проблема. "Der Schweizer Kindergarten" (Детский сад в Швейцарии), 3/1970 год.

ческого счета по числовым рядам (более подробно об этом смотрите в разделе "Ритмичный счет"). Так, например, мы желаем выделить числа троичного ряда, постепенно подавляем промежуточные числа и разрабатываем таким образом определенный ряд. Если образование ряда в ходе ритмического процесса оказывается достаточно подготовленным, то мы начинаем с пространственных расчленений. Так, например, на полу мы можем представить "ручей", в котором уложены "камни" таким образом, что мы можем перейти этот ручей за 12 шагов. Если мы делаем теперь шаги двойной длины (через один камень), то для перехода через ручей потребуется сделать лишь 6 шагов, при "тройных" шагах - 4 шага и т.п. Естественно, исходное число должно, по возможности, содержать достаточно делителей.

При таком задании устанавливается отношение между двумя числами: исходное число шагов (например, 12) и число, выражающее длину шага (например, 2). Подсчитаем шаги. Следовательно, мы образуем в мультипликативной структуре число отношени 12 : 2 = 6. Расположенные слева от знака равенства числа, являются здесь, собственно, длинами, измеренными с учетом базовой величины шага от одного камня до другого. Число, расположенное справа, является безразмерным числом отношения. Оно показывает, во сколько раз нужно увеличить число шагов, чтобы получить исходное целое. Нахождение его значения мы проводим в данном случае таким образом, что акцентируем теперь наше внимание не на сравнении конкретных длин, а *на работу с числами*.

После таких упражнений переходим к количествам предметов, т.е. еще более отчетливо от временного - ритмического характера к пространственному. Расположим друг около друга какое-то множество предметов и посредством счета определим их количество. Затем выделим какое-либо подмножество и зададим вопрос, сколько же таких подмножеств содержится в целом? Следовательно и в данном случае состояние отношения устанавливается между однородными величинами: множествами предметов. Полученное число вновь оказывается безразмерным числом, а не множеством предметов.

Равномерному расчленению (делению) вновь можно противопоставить синтетическое соединение. Если, например, целое составляет 12, а подмножество 4, то ответ на вопрос, сколько раз 4 содержится в 12, гласит: трижды. Синтетическое соединение выглядит так: три, умноженное на 4, дает 12. Несколько позже мы еще коснемся важной в этом отношении постановки задачи: переструктурирования числа, мультипликативное деление (расчленение) которого мы определили таким образом, что возникает представление, что множитель и множимое как бы по- менялись местами. Пример: если определено, что 12 = 2 · 6, то 12 = 6 · 2 - это подразумеваемое переструктурирование, которое получается в первом классе не формально посредством применения коммуникативного закона, а мыслится также с учетом содержания.

Другую форму умножения мы вводим таким образом, что произведение хотя и описывается с учетом содержания, однако, оказывается заданным лишь его сомножителями. Следовательно, выход из целого заключается не в заданном числе, а в задании цели расчета с точки зрени содержания. Следовательно, спрашивается: в каком числе "r" - с учетом описываемого содержания - данное число "p" содержится "a" раз? (Пример приводится в следующем разделе).

В качестве непосредственно примыкаемого обращения можно провести обычное деление, т.е. r / a = p, естественю, не употребляя при этом дроби.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ И ТЕМПЕРАМЕНТЫ

Для последующего рассмотрения необходимо основательное знание учения о темпераментах, разработанное в антропософской антропологии. Сюда относится, в частности, ознакомление с чертами человеческой сущности, преобладание или недостаток которых порождает *индивидуальную* структуру темперамента. Поэтому каждое высказывание о темпераменте может рассматриваться лишь как характеристика идеального типа, в действительности не существующего. Однако описания идеальных типов позволяют "прочитать" индивидуальный профиль темперамента и учесть преобладающие признаки характера. В обычном классе всегда будет несколько детей, поведение которых отличается преобладанием определенных признаков. Большая часть детей будет занимать промежуточное положение. И часто в зависимости от визави или осуществляемой деятельности выделяется тот или иной темперамент. Так, имеются люди флегматичной конституции, люди с сангвинической способностью к восприятию и люди с холерическим мышлением.

При изложении видов счета относительно таких видов темперамента следует прежде всего сослаться на высказывани Рудольфа Штайнера, содержащиеся в четвертом докладе "Семинарские беседы", которые полностью приведены в приложении 2. Так каждый темперамент проявляется дважды, один раз в основной и один раз в побочной роли. При этом каждый темперамент попарно об'единяется со своим противоположным темпераментом соответственно следующей схеме:

Холерик

Сангвиник Меланхолик

Флегматик

Отношение противоположных темпераментов в приводимых ниже рассуждениях играет существенную роль.

СЧЕТ ДЛЯ ФЛЕГМАТИЧЕСКОГО ТЕМПЕРАМЕНТА

Понимание целостности (множества), определение числа однородных предметов, которые сосредоточены в нем, а также их аддитивное расчленение являются основной задачей, которая ставится перед флегматиком. В качестве символизирующей фигуры приведем:

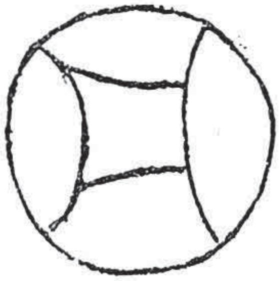


Рис. 16

Этот охват с образованием единого целого и внутренний анализ являются на различных уровнях характерной чертой флегматического темперамента.

На физическом уровне вышесказанное тесно связано с процессами обмена веществ - ибо чем иным, как ни анализом пищи является пищеварение. Образно можно сказать: пищеварение - это все более точно расчленяющее рассмотрение субстанций с тем отличием, что *в реальности* это происходит с помощью бессознательно осуществляемых процессов обмена веществ (в отличие от мысленно проводимого образного анализа посредством вызывающего представления сознания).

На душевном уровне флегматический темперамент ищет гармонию в отношениях с другими людьми. Принадлежность или непринадлежность к коллективу играет существенную роль. При определенной ответственности функциональная деятельность группы может стать гораздо более плодотворной. Внутренняя организация и гармоническое взаимодействие усилий в группе требуют флегматических качеств.

Синтетическое об'единение аналитически полученных частей требует более осознанного напряжения воли, принимающего внешнее оформление. Здесь проявляются холерические нюансы душевного. Поэтому при обучении учитывается анализ, проведенный носителем флегматических качеств, и посредством противоположного темперамента и с помощью синтеза вновь приводится к целому.

СЧЕТ ДЛЯ МЕЛАНХОЛИЧЕСКОГО ТЕМПЕРАМЕНТА

Меланхоликам мы поставим задачу вычислить из целого и остатка разницу, т.е. активно изменяющуюся величину. Это об'единяется с душевным самопереживанием меланхолика в отношении к окружающему его миру. Меланхолический темперамент выражается в том, что он переносит свои различные восприятия на окружающую среду. Прежде всего, он осознает недостатки, которые наблюдает в себе в сравнении с высоким идеалом. Способности других людей, которыми он не обладает в равной степени, создают такую идеальную картину и одновременно болезненное чувство собственной недостаточности. Естественно, повод для таких переживаний многократно находит каждый человек. Меланхолический темперамент заключается в том, в какой связи находится самооценка и идеальное состояние. Этот процесс нельзя путать с настроением депрессии. Для внутренне сильного деятельного меланхолического темперамента свойственно побуждение более сильно проявлять себя и развивать дальше собственные способности.

Если отличающийся меланхолическим настроем ребенок составил различия, то от сангвинически ориентированного ребенка мы ждем такого же задания в виде активного вычитания. Следовательно, то, что рассчитывалось бы меланхоликом как разница r / p = a, сангвиником производилось бы в виде противоположного действия в вычитании: r - a = p.

СЧЕТ ДЛЯ САНГВИНИЧЕСКОГО ТЕМПЕРАМЕНТА

При постановке задачи для сангвинического темперамента мы делаем упор, прежде всего, на процессах, связанных с ритмом дыхания. В данном случае при проведении ариф-метических действий в первую очередь предлагается образование отношений, строящихся на умножении. Сангвинический темперамент в значительной мере участвует в создании отношений к окружающему миру и деятельности, которая может развиваться в нем вместе с ним. Следовательно, здесь наблюдается меньший интерес, который вызывается собственно вещами, и больший к тому, что происходит с ними в качестве процесса.

Выше мы указывали на то, что при проведении счета с названными величинами при образовании отношений соответствующие величины исчезают и воспринимается *безразмерное* число отношения. Поэтому, например, две длины могут находиться во взаимном отношении так же, как и два веса. Такое решение непосредственно вещественно данного родственно сангвиническому переживанию. Легкость и подвижность душевных жестов сангвиника находятся в тесной связи с такой возможностью решать задачи, все время исходя из грубо вещественного. Если это не удается, то уныние его надвигается подобно темной грозовой туче, в сравнении с обычно приподнятым настроением. Так возникает переход: "От ликования до небес до смертельного огорчения".

Как и при рассмотренных уже видах темперамента, описываемый противоположный темперамент, т.е. меланхолический, будет на лету производить вычисления и соответствующие преобразования. Здесь должно иметь место пересруктурирование, при котором сомножитель и множитель меняются местами. Таким образом, если сангвинику в качестве целого представляется "r" предметов, из него выделяется часть "p" и спрашивается о сомножителе "a", то лишь часть величины "a" отделяется и задается вопрос в отношении "p" (которое становится теперь сомножителем).

Естественно, этот процесс переструктурирования формально соответствует коммуникативному закону. Если перед сангвиником находятся предметы, то качество сомножителя или, соответственно, множителя может переживаться непосредственно.

Помогают ли здесь геометрически выраженные образцы, представляется мне спорным, если учесть, насколько легко могут стираться количественные различия сомножителя и множителя. Пространственная суггестия *не* должна приводить к действительному пониманию.

Для ребенка остается существенным достижением то, что упорядоченное *одним* образом упорядочивается по-новому. В отношении же возможностей применения - о чем уже говорилось при обсуждении арифметических действий - коммуникативность сомножителей обычно не задана. Это переструктурирование требует особенной внутренней активности и подвижности, которые с одной стороны оказываются весьма возможными для меланхолика, а с другой одновременно необходимы ему, ибо он склонен к удерживанию однажды образованных представлений.
Небольшое упражнение из рисования форм[16] содержит кое-что из таких устремлений, которые должны требоваться темпераментом меланхолика. Левая форма задается учителем. Затем от ребенка, отличающегося меланхолическим характером, требуется получить точно такую же форму, рисуя ее слева, где ничего не нарисовано и наоборот.

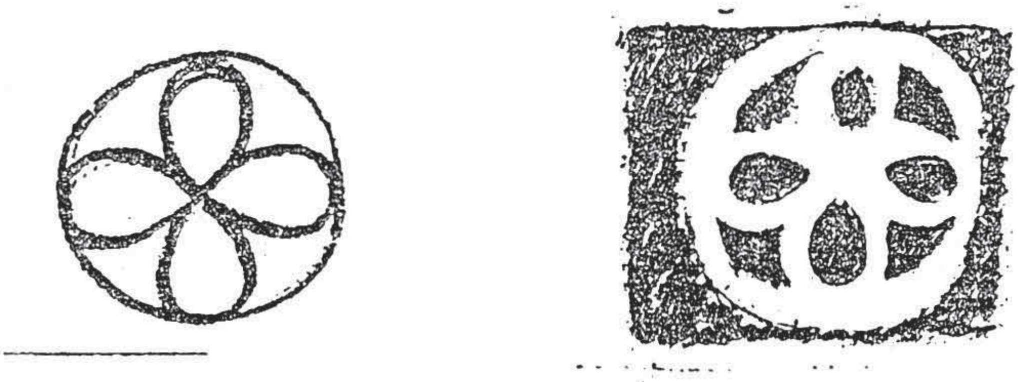


Рис. 17

Здесь ребенок должен преобразовывать заданное через особненную внутреннюю активность, где посредством переструктурирования он создает отрицательную форму от "бытия" к "небытию".

СЧЕТ ДЛЯ ХОЛЕРИЧЕСКОГО ТЕМПЕРАМЕНТА

Для того чтобы понять инициативу Рудольфа Штейнера, при обучении счету холериков, является целесообразным представить себе некоторые из характерных свойств этого темперамента. Это выражается в положительном отношении к

16. Ср. Рудольф Штейнер. Искусство воспитания. Обсуждения на семинарах и доклады по учебной программе. Библ. номер 295, обсуждение на 4-ом семинаре.

инициативной и формирующей деятельности. Это происходит от уверенного самосознания и веры в собственные способности. Но это самосознание и вера могут дойти до переоценки возможного. В произведении Шекспира "Сон в летнюю ночь" среди мужчин, желавших сыграть роль Титани и Оберона, появляется записка. При распределении ролей каждый из них считает, что именно он является наиболее подходящим для любой роли, и поэтому он хотел бы, чтобы ее исполнение было поручено именно ему и кажется, что лучше всего было бы сыграть все роли ему одному, при этом никто ничуть не сомневается, что именно он является самым лучшим исполнителем. Такие случаи известны не только из театральной жизни.

При обучении счету холериков следует выделить следующее: прежде всего перед сознанием предстает общая ситуация. Целостность с точки зрения содержания сна. Однако она требует множества функций, взаимодействие которых еще нельзя охватить. Отдельные сомножители известны, но не известно количество целого. При счете можно поступить таким образом, что произведение "г" описано по содержанию, но определено лишь сомножителями "р" и "а". Из арифметического соотношения в краткой форме формируется вопрос: в каком числе "г" число "р" содержитс "а" раз?

Решенную задачу затем адресуют ребенку с противоположным темпераментом - флегматику - преобразуя ее в обычное деление: при делении числа "г" на "а" частей получаем части величины "р".

Специальным для холерика упражнением, требующим правильной оценки общей ситуации, является задание пройти некоторое расстояние определенным числом шагов одинаковой величины. Здесь с учетом целого с самого начала должен определяться правильный размер шага, - требование, являющееся для холерика приемлемым, учитывая его силу в структурировании, но делающее необходимым сознательный исход из имеющегося целого.

Благодаря этой душевной окраске арифметических операций, наряду с подвижностью в преобразовании числовых отношений развивается внимательность детей друг к другу, с учетом особенностей противоположных темпераментов.

При проведении счета таким образом учитель развивает высокую внутреннюю подвижность. Разумеется, это требует некоторых усилий, которые при работе с детьми оказываются более легкими, чем казалось раньше. Прежде всего, отдельные арифметические операции приобретают для него - и таким образом для детей - духовную окраску.

Эта окраска играет далеко не последнюю роль в непосредственном ощущении того, что является сутью арифметических действий. Здесь позднее появляется неуверенность в тех случаях, если отдельные операции не переживаются характерно различным образом. Калькулфятор внушает равенство операций: речь идет о простом нажатии на клавишу. Следовательно, смысл внутреннего характера операций должен изучаться независимо от этого.

За исключением случаев, когда арифметические действия подчинены определенным типам задач, пожалуй, не существует правила для выбора необходимого действия в рамках практической ситуации. Следовательно, выбор всегда должен производиться интуитивно - как и соединение понятия с эмпирическим содержанием. В нашем случае это, прежде всего, оказывается возможным, если - наряду со способностью к проведению четкого отвлеченного анализа проблемы - действия могут узнаваться при большой разнице в содержании.

Перед любым логическим структурированием действий должен иметь место опыт, который должен приводиться в состояние логической взаимосвязи. Это основной вопрос теории познания и вопрос психологии развития. С помощью представленного метода мы попытались дать ответ на вопрос: эмпирические основы для математических понятий лежат во внутренних опытах движения. Математические действия по-разному зависят от тестов движения, с помощью которых числа, усвоенные в процессе внутреннего движения, вновь расчленяются. Эти движения связаны с собственным жизненным опытом. При образовании отношений мы затрагиваем изнутри ритмические процессы, при аддитивных членах мы сильнее воспринимаем относительно независимые друг от друга органы, при образовании разницы - отставание людей с меньшим интеллектом от людей с более высоким, при получении мультипликативного расчлененного целого - волевой охват всего организма движения.

СВЯЗИ МЕЖДУ АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ДЕЙСТВИЯМИ И ТЕМПЕРАМЕНТАМИ

ВЫЧИТАНИЕ r - a = p	РАЗЛИЧИЕ r I p = a	СЛОЖЕНИЕ p + a = r
Сангвиник. Активное вычитание. Если я вычитаю "a" от "r", то остается "p": r - a = p	*Меланхолик.* Исходя из целого и остатка, вычисляется вычитаемое. Было "r". Осталось "p". Что потеряно? Или: что должно отниматься, чтобы осталось "p"? (*Холерик.*) Активное синтетическое сложение: a + b + ... = r	*Флегматик.* Аддитивное аналитическое членени числа. Что такое "r"? Или: как ты можешь разделить "r"? r = a + b + ...
ДЕЛЕНИЕ	ОТНОШЕНИЕ	УМНОЖЕНИЕ
r / a = p	r : p = a	a · p = r
Флегматик. Активное деление. Если "r" разделю на "a" частей, то получу части величины "p": r / a = p.	*Сангвиник.* Исходя из целого "r" и части "p", следует узнать сомножитель "a". Например, у тебя "r" Сколько раз в нем содержится часть "p"?	*Холерик.* Определение числа из его мультипликативного расчленения: в каком числе "r" "p" содержится "a-"раз? ? r = a ·
ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ	ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ	ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ
$\sqrt[a]{r} = p$	$^{p}\log r = a$	$p^{a} = r$

ИСТОРИЯ К ТЕМЕ "СЧЕТ И ТЕМПЕРАМЕНТ"

Благодаря описанию небольших историй подведем детей к условиям задач. Естественно, при этом новое описание может даваться не для каждого задания. Вместо него мы будем несколько варьировать ситуацию, наиболее просто - с помощью вопросов как: ... и как было бы, если ...? При этом для той же взаимосвязи задаются новые числа. Следует избегать стереотипных постановок вопросов или стереотипных выражений для определенных условий задач. Если арифметические действия основательно обсуждены, то в упражнениях они могут сме- шиваться, что требует высокого умени учителя. Дети должны не только правильно составлять числовое отношение, но и, прежде всего, выбирать правильное арифметическое действие.

Примером небольшой истории может служить такая: "На расположенном в горах крестьянском дворе жила молодая семья. Жизнь в горах всегда нелегка. Каждый из членов семьи выполнял посильную работу. Даже дети, а их было трое, и как мы узнаем ожидалось прибавление семейства, помогали там, где это было им по силам. Отец заботился о коровах, доил их утром и вечером, помогал матери на сыроварне, приводил в порядок дом и хлев, если требовалось что-либо поправить, особенно весной после снежной зимы, когда бывало много снега. Мать, наряду с работой по дому трудилась на огороде, сыроварне, делала много других дел. Дед заботился о козах и овцах, за курами присматривала бабушка, а дети помогали ей: они искали яйца, которые куры высиживали не на насесте, а во всех потайных местах хлева. Дети помогали собирать ягоды, носили дрова для кухни и сыроварни. Когда же наступало время сенокоса, они помогали отцу и деду переворачивать траву, чтобы она как можно скорее и лучше просыхала, так как в зимнее время коровы, козы и овцы ели сено в хлеву, ведь на дворе были высокие сугробы. Кроме того, труд детей был хорошим подспорьем на сенокосе, потому что летние травы и цветы пахнут лучше, если их быстрее высушит солнце".

Так или примерно так даются детям небольшие описания, в которые вкладывается что-нибудь из самых различных сфер жизни. Итак, продолжаем: "В одном часе ходьбы от дома в долине располагалась небольшая деревня, где находилась церковь. В этой деревне жил пекарь и несколько мастеровых, и еще несколько крестьян. Большинство же крестьян этой общины проживало на склонах гор на определенном расстоянии друг от друга. Отец приносил в деревню готовый сыр и продавал его торговцу. А тот вместе с другими вещами и продуктами отвозил сыр в город. От торговца отец приносил домой то, в чем нуждалась семья, и что она сама не могла производить: инструменты и иголки, ножи и горшки, соль, в том числе и соль для коз, и прежде всего, хлеб и муку. Ведь зерно там, на высоте, прорастало с трудом.

Добавим, что в деревне была школа. Бернард, старший из детей, которому исполнилось 7 лет, должен был идти в школу. Его сестре Урсуле было почти 5 лет, а Мартину, самому младшему в семье ребенку - 2 года. Когда Бернард пошел в школу, он еще мог помогать в том, что доставляло много хлопот. Время от времени, когда дома было немного дел, отец спускался вниз в деревню. Пекарь, который также был еще и крестьянином, выпекал хлеб и сдобные булочки лишь два раза в неделю, поэтому походы в деревню не всегда приносили отцу успех - в семье иногда не оказывалось хлеба.

Поэтому время от времени в деревню спускалась мать, покупала хлеб и то, что ей казалось необходимым или нравилось. Она обычно брала с собой Бернарда, а иногда и Урсулу. Вероятно вы поодумаете: ведь для детских ног это большой путь - час под гору и полтора часа вверх, однако ноги детей, живущих в горах, привыкли к под'емам. У обоих ребят были рюкзаки. Бернард носил в своем одну или две буханки хлеба, Урсула - пару яблок для подкрепления сил во время пути, а также свою куклу.

Когда Бернард пошел в школу и ежедневно стал проде- лывать этот путь, то он всегда приносил, когда было нужно, в своем рюкзаке хлеб или что-нибудь необходимое, что, конечно, было хорошей помощью семье.

Тем временем другие дети подросли и пошли в школу, и лишь Мари и Себастьян, которые родились позднее, не ходили в школу. Дети-школьники, взяли на себя покупку хлеба в деревне, который они несли домой - вверх в гору. У них были рюкзаки, куда многое вмещалось, и могло бы вместиться еще больше, ибо с увеличением семьи росла и потребность, да и двенадцатилетний Бернард с'едал почти столько же, что и взрослый. По субботам, когда дети покупали хлеб, они всегда оказывались перед решением задачи: кто и сколько понесет хлеба: обычно покупалось 7 буханок на каждый день. Иногда, когда дома еще оставался хлеб, то лишь 6 буханок, а иногда даже и 8. Было ясно, что младший Мартин не мог донести столько же хлеба, что и Бернард, однако он не хотел мириться с ролью слабого. *Можете ли вы сказать, как дети несли хлеб*?"

Здесь следует провести определенные расчеты. Количество буханок и детей, приносивших их, может изменяться. Пример выбран таким образом, что *неравенство* из-за разного возраста представляется *оправданным*. На это следует обратить внимание. При неравном распределении, например, сладостей и т.п. добиться согласия будет гораздо труднее - и это справедливо - чем это при распределении продуктов и предметов, вызывающих мало интереса или не вызывающих интереса вообще.

Обратимся к ребенку с сангвиническим характером со следующим описанием: "Путь в школу для живущих в горах детей часто оказывается весьма утомительным. С солнцем и дождем, снегом и ветром деревенские дети знакомы гораздо ближе, чем городские. Разумеется, в зимнее время дети могли легко скатиться вниз на лыжах, но потом приходилось с трудом взбираться в гору по глубокому снегу. Сложно бывало весной, когда таял снег, и дети, спускаясь с гор, вынуждены были перепрыгивать через лужи. В это время года ручьи легко растекаются, затопляя дорогу, и чтобы хоть половину пути пройти с сухими ногами, дети бросали себе под ноги камни, близко один от другого, чтобы могли пройти и малыши. Там, где разлившийся ручей перекрывает дорогу, дети вынуждены были делать 12 шагов". Можно пометить ручей и камни на земле.

"Более старшие дети, конечно, двигаются не маленькими шагами с камня на камень, а могут перепрыгивать через один или даже два камня. Сколько же шагов потребуется им, чтобы перейти препятствие двойными шагами?"

Этот расчет может быть сделан на примере "ручья", который мы начертили на полу. Подобно этому обсуждается тройной шаг и т.п. Исход из целого числа 12 и части, размера шага, определяется сомножитель - число шагов. На доске мы можем написать произведение и относящиеся к нему сомножители следующим образом:

целое
12

Размер шагов	Число шагов
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1

Варьированием целого мы проводим мультипликативные анализы различных чисел и даем первоначальное понятие об их различиях.

По поводу задач на умножение/деление можно продолжить историю таким образом: "Накануне Пасхи сестра матери сообщила, что приедет к ней вместе с сыном. Все обрадовались, так как в горах редко появлялись чужие, да и с двоюродным братом хотелось поиграть. Всех вместе собралось: дедушка и бабушка (2), семья (7) и гости (2). Следовательно, всего получается 11 человек. Естественно, обсуждается кто и где будет спать и т.п. Надо покрасить пасхальные яйца, что-то испечь и купить у пекаря любимые всеми сдобные крендели. Сколько же нужно заказать продуктов? А их необходимо заказывать, а то потом не достанется. Определяется, что на каждого человека будет достаточно двух кренделей. *Сколько же необходимо заказать*?

Точно также обсуждается вопрос о том, что надо покрасить яйца и спрятать их от детей. Это обсуждает мать с Бернардом и бабушкой. Каждый ребенок должен получить по 4 яйца. *Итак, сколько же надо сохранить и потом покрасить*?

Для образования различий можно продолжить следующим образом: "Когда наступил день Пасхи, Урсула упросила отправить ее вниз в деревню, чтобы купить сдобные крендели. Двоюродный брат, который был младше Урсулы, побежал вместе с ней и они весело спустились с горы. Они купили нужное количество кренделей, еще кое-что, о чем просила мать, и вновь побежали домой. Однако, когда они стали вынимать из рюкзака крендели, то вместо 24 в нем оказалось лишь 15 штук. "Ты сказала пекарю, что он должен был продать нам 24 штуки?" - спросила мать. "Конечно", - ответила Урсула. "А ты их не с'ела по дороге?" - спросила мать и посмотрела детям в глаза. "Конечно нет", - ответили оба, они действительно были честными детьми. Дети беспомощно посмотрели вокруг. И тут мать увидела, что на дне рюкзака дыра, и в это время кто-то из детей уже прибежал в дом и крикнул: "В траве всюду разбросаны сдобные крендели!" Дети тотчас выбежали на улицу собрать их. *Сколько же они должны найти кренделей, чтобы их снова стало 24*?

Как и в других случаях, здесь могут варьироваться числа и ситуации и задаваться соответствующие вопросы, учитывающие противоположные темпераменты.

ВВЕДЕНИЕ ЗНАКОВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

В отличие от не имеющего образности введения цифр мне представляется целесообразным вводить знаки арифметических действий (+, -, ˙, :) таким образом, чтобы в них просматривался остаток произведенного действия. Естественно, и в данном случае учитель, применяя свой стиль обучения и добиваясь соответствующего взаимодействия с классом, должен выбрать то, что подходит лишь для определенной ситуации и создает радостную атмосферу, которая заставляет полюбить даже абстрактные символы. Так при об' снении знака плюс (+) ребенку напоминается о соединении обоих чисел, например 4 и 5. Одна коллега при об' снении знака минус (-) рассказывала коротенькую историю, связанную со счетом: речь шла о лисице, которая воровала гусей, а хозяева видели только ее хвост. Вводя знак умножения (˙), можно вспомнить шаги, которые делали дети, прыгая по камням: 4 ˙ 3 представляется в виде четырех тройных шагов. Знак деления (:) можно получить, например, образуя отношение, при котором благодаря прыжкам число шагов уменьшается (вспомним историю о крестьянских детях). Нижняя точка - это камень, через который прыгает ребенок, тогда знак для прыжка будет обозначен посредством ":".

Такое припоминание о какой-то деятельности душевно окрашивает простые символы. Кроме того, это дает возможность пережить арифметические действия как действия разного харак- тера, что оказывается важным для их выбора в тех случаях, когда выбор не становится очевидным сразу.

РАЗВИТИЕ ПАМЯТИ

К важным задачам начального обучения счету относится развитие памяти. Психология разработала множество аспектов развити памяти, которые в своем контексте имеют определенное значение. На первый план здесь выдвигается один из аспектов, который развивается Рудольфом Штейнером в одном из докладов[17]. В этом докладе он указал на различные формы памяти, которые сформировались в ходе культурного развития. В самой ранней индийской культуре, прежде всего, развивалась "*локальная память*". Эту взаимосвязь места и повторения активности можно наблюдать и сегодня у маленького ребенка - будь то квартира, или другие, реже посещаемые места: место оставляет воспоминание о сделанном и вновь побуждает к тем же действиям.

В более позднее время развивалась "*ритмическая память*", тесно связанна с языком. Обучением в восточных культурах было и есть по сей день изучение текстов путем чтения вслух и пересказывания. Мы также проще всего запоминаем песни и изречения, произнося их, и можем воспроизводить их часто лишь в языковой взаимосвязи. Ребенок до школы с легкостью усваивает многое таким образом и сохраняет это на всю жизнь.

Сегодня на передний план нашей культуры выходит "*временная память*". За то, что мы усваиваем сознательно предоставленные знания, следует благодарить именно этот вид памяти. Это позволяет нам запоминать всевозможные факты и процессы и соответственно обращаться с полученными таким образом представлениями, внутренне их перерабатывая.

Рудольф Штейнер указывает на эту последнюю форму памяти, когда он говоря о начальном обучении счету постоянно подчеркивает необходимость тренировки памяти[18]. С точки зрения антропологии формирование этой формы памяти взаимосвязано с высвобождением формообразующих сил, в особенности, в области головы ко времени начала смены зубов. Структура физических органов особенно выражена именно в это

17. Рудольф Штейнер. Мировая история в антропософском освещении и в качестве основы познания человеческого духа. Библ. номер 233, 1-й доклад от 24.12.1922 года.
18. Например, в небольшой работе "Воспитание ребенка с точки зрения духовной науки". Библ. номер 34.

время[19], а часть формообразующих сил душевно предоставляется в распоряжение для свободного управления представлениями и для памяти. Ступень конкретных (осуществляемых внутренне) операций[20] , описанная Жаном Пьяже, является выражением этих изменений, которые начинаются со школьной зрелости. Таким образом, область представлений получает новое качество. Ребенок внутренне может двигаться в ней так, что при этом приобретаются убеждения о соотношениях внешних вещей, например, независимость количества от его формы. С формированием памяти эти силы охватываются Я и *должны* им охватываться, если развивается неупорядочная и не ведомая волей ассоциированная жизнь представлений. Обучение счету предлагает для этого устный счет, как превосходное средство.

С точки зрения антропологии ребенок школьного возраста владеет ритмической памятью. С помощью нашего обучения следует развивать временную память или память представлений. Следовательно, сначала мы можем ритмически разработать основы устного счета и лишь затем решительным образом запечатлевать это в памяти представлений. Простое действие 1 + 1 (все суммы от 1 + 1 до 10 + 10) уже непосредственно обращено к этой памяти.

19. Ср. Эрнст-Михаэль Краних. Силы физического формообразования и их превращение в способность формировать и переживать формы. См. Юнеманн М. и др. Рисование форм. Развитие чувства форм в воспитании. Штутгарт, 1992 год.

20. См., например, Б.Ж.Пьяже. Психология интеллекта. Ольтен и Фрейбург, 1974 год.

ВВЕДЕНИЕ ПРОСТЕЙШЕГО ДЕЙСТВИЯ 1 + 1

Уже во время первой эпохи математики ребенок учится сложению вышеописанным образом. Исходя из результата, целого, он производит аддитивные расчленения и затем синтетически об'единяет их снова. При аддитивных расчленениях двухразрядные суммы занимают особое положение. Следовательно, если усваивается 7, то на доске и в тетради (по возможности еще перед введением "+") упорядоченно появляются следующие разложения:

7

6	1
5	2
4	3
3	4
2	5
1	7

Затем идет упражнение на запоминание до тех пор, пока не достигается уверенность. Для этого может закрываться или стираться одна из колонок, и при указании на различные числа ребенок должен назвать другое слагаемое.

Естественно, некоторые активные дети смогут назвать несколько слагаемых, дополняющих число. Однако, в названной здесь группе упражнений подчеркивается разложение на два слагаемых.

Теперь можно ввести для отдельных чисел две другие группы упражнений. Если, например, тренируем "+ 2", то мы разлагаем числа так, чтобы вторым слагаемым было число 2. Следовательно, если мы произносим 5, то дети в качестве решения дают, например, 5 = 3 + 2. После некоторого времени (в течение первого года обучения) это можно сократить таким образом, чтобы называлось лишь первое неизвестное слагаемое. Если, скажем, называется или показывается 5, то дети произносят или называют 3 и т.п.

В следующих (синтетических) упражнениях к называемому числу следует прибавить 2. Если, например, называется 5, то в ответе числа так, чтобы вторым слагаемым было число 2. Следовательно, если мы произносим 5, то дети в качестве решения дают, например, 5 = 3 + 2. После некоторого времени (в течение первого года обучения) это можно сократить таким образом, чтобы называлось лишь первое неизвестное слагаемое. Если, скажем, называется или показывается 5, то дети произносят или называют 3 и т.п.

В следующих (синтетических) упражнениях к называемому числу следует прибавить 2. Если, например, называется 5, то в ответе будет 7, и дети должны сказать: 5 + 2 = 7. В данном случае условие задачи может быть и более сжатым, чтобы был возможен быстрый счет.

При введении первой группы упражнений можно сказать примерно следующее. Мы занимаемся счетом "и 2". Задумаем число. К этому числу уже прибавил 2. Теперь вы должны сказать мне, какое число задумал. Так, например, называется 7, дети отвечают 5 и т.п. При второй группе упражнений можно сказать так: "Теперь прибавьте к числу, которое назову, 2". Называется, например, 4. Дети говорят 6 и т.д.

Естественно, дети могут "передавать дальше" свои задания или упражняться в группах. Здесь не важен сам процесс счета как таковой, здесь важно, чтобы с помощью памяти шел процесс усвоения простых видов сложения.

Если в памяти запечатлелось простое действие 1 + 1, то известное "дополнение до полного десятка" не играет больше существенной роли. По моему мнению счет, который, естественно, производится устно 7 + 8 = 7 + (3 + 5) = (7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15, является здесь ненужным препятствием. Лучше, чтобы дети уверенно овладели с помщью памяти простейшим действием 1 + 1.

ВВЕДЕНИЕ ПРОСТЕЙШЕГО ДЕЙСТВИЯ 1 · 1

Таблица умножения выводится в процессе ритмического счета. Уже на первых уроках счет следует дифференцировать с помощью громкого и тихого голоса. При этом проводятся также медленные по ритму и дифференцированные упражнения с движениями. Помимо прочего, это ведет к ритмическому членению числового ряда, при котором выделяется каждое второе, каждое третье и т.п. число. Из вышесказанного формируются двоичные, троичные и т.п. р ды. Таким образом, надежное овладение счетом предусматривает умение детей не только произносить наизусть те или иные числа, но и производить с их учетом определенные движения (см. ниже). Произношение хором или индивидуально оказывается недостаточным. Ниже приведены упражнения, способствующие созданию подвижности:

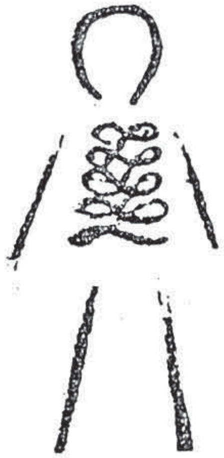
- Произношение хором числового ряда, например, 2, 4, 6, ... в поступательном и обратном направлении.
- Класс разделяется на две группы, которые попеременно называют числа.
- Класс разделяется на две или более групп. Учитель указывает на ту или иную группу, которая должна произносить следующее число ряда.
- Класс произносит ряд. По знаку руки прерывает. Ребенок должен назвать следующее или предыдущее число ряда.

Упражнения такого рода проводятся перед классом с отдельными учениками. Какая-то группа детей становится в круг. Небольшой мячик, который легко поймать, бросаем ребенку и называем число, а он должен назвать следующее число.

В то время как ритмическое говорение быстро усваивается из ритмической памяти, то при нерегулярном воспроизведении более сильным должно быть обращение к памяти представлений. Ритмическое говорение легко осуществляется полуосознанно. При переходе к нерегулярности и обращениям к отдельному ребенку числовые представления образуются более осознанно и бодро. Это пробуждение при обучении счету как раз имеет важную педагогическую задачу, иную, нежели в художественной деятельности, например, в пении, рецитации или эвритмии, когда нарушение творческого процесса наносит вред переживаниям ребенка.

Недостаточные способности класса в счете часто об'ясняются недостающим пробуждением памяти представлений и заниженными требованиями к отдельным результатам.

Когда учитель применяет различные виды деятельности можно наблюдать, как пробуждаются душевные силы каждого ученика в отдельности: при ритмическом вышагивании или иных ритмических движениях происходит обращение к воле в комбинации с ритмической системой. При обычном разговоре тело находится в покое. При нерегулярном обращении к отдельному ученику с просьбой назвать те или иные цифры пробуждается свободная подвижность в представлении. Материал становится педагогическим инструментом для упорядоченного обращения к душевным силам и пробуждения памяти.



3. Свободная подвижность в числовом ряде.

2. Ритмическое говорение.

1. Ритмическое движение и речь

рис. 16

Если затем умножение вводится вышеописанным способом, то вслед за упражнениями, связанными с шагами, производится обучение операции 1 · 1. Так, например, мы предлагаем пройти ученику перед классом троичный ряд, а классу называть число шагов, тогда:

Отдельный ученик	Число шагов	Класс
3	1	3 - это 1 · 3
6	2	6 - это 2 · 3
9	3	9 - это 3 · 3

Условием этого шага - для соответствующего 1 · 1-ряда - является усвоение достаточно большого числового пространства с помощью счета, овладение соответствующим числовым рядом и введение умножения. При выполнении этих условий следует энергично продвигаться вперед, одновременно заучивая.
"После завершения периода смены зубов[21] можно начинать учить таблицу умножений и действий, связанных с простейшим сложением (1 + 1) по меньшей мере до числа 6 или 7. То есть надо давать учить ребенку довольно рано на память таблицу умножения и примеры на простейшее сложение, но только после того, как ему принципиально об'яснили, что это собственно такое. В отношении умножения должно быть принципиально раз'яснено, что следует поступать вышеописанным образом.

21. Из этого следует, что здесь подразумевается не только более позднее завершение смены зубов, но и полная замена их.

Следовательно, оказывается недостаточным дать ребенку только понятие умножения, необходимо обязать его учить таблицу умножения на память"[22].

Уже из изучения числовых рдов следует, что ряды 1 · 1 должны изучаться не только ритмически; требуется настойчивое обращение к памяти представлений при каждом действии на умножение. После того, как достигнуто свободное владение простым 1 · 1-рядом, следует добиться подвижности счета при умножении между рядами.

Следовательно, предложенный путь содержит примерно следующие операции:

- счет,
- ритмический счет, упорядоченный по числовым рядам,
- обучение начальной подвижности в пределах числового рда,
- прохождение умножения,
- введение 1 · 1-р дов,
- подвижность в пределах отдельных рядов,
- свободная подвижность между рядами, причем как для мульти-пликативного разложения числа на сомножители с учетом таблицы умножения, так и для вычисления по сомножителям.

Мне хотелось бы еще раз настоятельно указать на слово "обязанность" в высказывании Рудольфа Штейнера. Именно целенаправленное усвоение содержания с помощью памяти является со вступлением ребенка в школьный возраст центральной задачей педагогики. Соответствующее выравнивание достигается на уроках математики с помощью сил фантазии, благодаря историям, связанным со счетом, с помощью творческих находок школьников и учителей при создании ритмических упражнений и многого другого. Усиленна работа памяти в процессе обучения счету как раз является выраженным акцентом на развитие фантазии[23].

22. Рудольф Штейнер. Искусство воспитания. Обсуждения на семинарах и доклады по учебной программе. Библ. номер 295, 2-ой доклад в соответствии с учебным планом.

23. Ср. Рудольф Штейнер. Общая антропологи как основа педагогики. Библ. номер 293, 2-ой доклад.

ОБЩАЯ СТРУКТУРА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ ВО ВРЕМЯ ПЕРВОГО УЧЕБНОГО ГОДА

Обычно для преподавания математики в течение первого учебного года имеется в распоряжении, как правило, 12 недель, что дает возможность длиться каждой эпохе по четыре недели. Так как зимнее время особенно подходит для математики, то их следует распределить примерно на позднюю осень, зиму и время Пасхи. В конце учебного года счет еще раз вспоминается в части, отведенной для повторения. Некоторые учителя повторяют регулярно в ритмической части других эпох.

Распределение материала с точки зрения содержания во многом зависит от энтузиазма учителя в области математики и от конкретной ситуации в классе, связанной со способностями детей. В целом можно рекомендовать, как и предполагалось, давать темы в первую эпоху еще очень расплывчато. Важными являются процесс введения чисел и арифметических действий, уверенность в счете, записывании чисел и в усвоении (небольших) количеств. Числа должны с помощью ритмических упражнений становиться переживанием в движении. Простые письменные вычисления проводятся указанным образом без знаков арифметических действий. Учитель должен как можно быстрее распознать имеющиеся отставания и скорректировать их посредством ритмических упражнений на понимание чисел.

Вторая эпоха может уже более четко подвести к осознанию характера отдельных арифметических действий. Они называются, и вводятся их знаки. Это становится возможно, если первая эпоха была заполнена математической деятельностью, и не терялось время на неэкономичное введение цифр. Вначале тренируется простейшее действие 1 + 1, а разработка рядов готовит малую таблицу умножения. Счет и запись чисел можно расширить приблизительно до 120.

Третья эпоха продолжает все начатое, но центральным ее моментом становится разработка первых рядов 1 · 1. Дети должны иметь четкое представление о порядке чисел с помощью постоянно тренируемых ритмических чисел, а также уметь внутренне обозревать числовые пространства в области первых десятков. По возможности не следует принуждать способных детей изображать числовые отношения при помощи различных средств. Нужно признавать того, кто свободно умеет считать (см. раздел "Материалы в обучении математике").

В целом в течение первого учебного года закладывается много зерен, которые дадут плоды лишь во втором классе. Поэтому надо спокойно уметь ждать, пока разные дети усвоят пройденный материал и разовьют способности в математике.

Именно в математике, как и в музыке, способности чрезвычайно различны, и то, чему одного ребенка вряд ли надо учить, другим ребенком усваивается довольно медленно. Очень важно, чтобы при этом не развился страх не справиться с заданием, так как это может привести к тяжелым нарушениям, которые в течение всей жизни будут тормозить развитие способностей в математике. Если же на уроках математики царит, как это часто бывает, большой энтузиазм, то ребенок, отставший в чем-то в первом классе, сможет выполн ть это во втором. Как раз иметь уже пережитое в первом классе важно дл продвижени вперед во втором.

Некоторые другие точки зрения на работу с детьми, медленно или с трудом успевающими в математике, будут представлены в следующей главе.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ НЕУСПЕВАЕМОСТЬ И АНТРОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИКИ

Область проблем математической неуспеваемости, подобно области проблем легастении, многообразна и ее не следует характеризовать как однозначное явление. Безусловно, многие вопросы еще требуют глубокого исследования, но исследование может быть проведено и в рамках понятий. Автор нижеследующих заметок хотел бы внести скромный вклад в этот вопрос, направляя наблюдение и внимание учителя на проблемы, которые часто остаются вне поля его зрения.

Не существует, как уже было сказано, целостного синдрома "математическая неуспеваемость". Совершенно различные причины могут привести в конечном счете к подобным формам отношений и явлений, а именно к слабому или частично слабому успеванию. Подход к многообразию причин при изучении отставаний затруднен тем, что существует совершенно различная литература, посвященная этой теме.

Так, к примеру, есть многочисленные исследования специалистов-дидактиков по вопросу ошибочных результатов счета. В них исследуется прежде всего то, какие ошибки появляются при решении задач. Подобными ошибками являются, например, неправильный выбор арифметического действия или использование неверного правила, если при сложении дробей, например, суммируются числитель и знаменатель. Такой анализ обращает внимание на то, где возникают для детей особые трудности при решении задач. На основе подобного рода анализа выдвинуто и испробовано огромное количество рекомендаций, однако при этом в общем не говорится о собственно математическом неуспевании.

Наряду с такими работами есть и общая учебно-психологическая литература, где рассматривается проблема математической неуспеваемости; существует также целый ряд работ от лечебно-педагогической, психиатрической до нейропсихологической тематики. Особое значение имеют работы по психомоторике, например, исследовани Кипхарда и его коллег.

Мы хотим обратиться к некоторым типам математической неуспеваемости, которые следует различать по причинам их вызываемых.

ДИДАКТИЧЕСКИ ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ОТСТАВАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

а) Специальным, дидактически обусловленным отставанием в математике может стать смена методики. Такую причину можно предположить у вызывающего озабоченность ребенка в том случае, если имеет место смена школы или учителей. Опасность неуспеваимости растет, если какой-то метод сильно фиксирован на особом материале. Например, если ребенок учится счету на палочках Кузинаре (это небольшие деревянные палочки, которые изображают определенное число с помощью цвета и длины), а другой учитель следует другой методике, - то при таких условиях предмет не усваивается и требуемый результат не достигается.

б) Причиной математической неуспеваемости может стать также и строгая фиксация внимания на неком изобразительном средстве, если в дальнейшем довольно резко происходит переход к обучению без наглядных средств. Ребенок чувствует себя неспособным достичь требуемых результатов без наглядных для чисел и действий материалов. Если, например, первые степени представлялись наглядным образом линейно, на поверхности или в пространстве - первая, вторая, третья степень соответственно,- то более высокие степени останутся абстрактной загадкой для детей, привыкших к наглядности. Дидактической ошибкой является в данном случае одностороннее изображение арифметических отношений геометрически.

в) Особую форму слабых успехов в математике можно было наблюдать в результате логицистического подхода к этому школьному предмету. В 60-х годах началась реформа преподавания математики попытками столкнуть младших школьников со школьной "теорией множеств". В 70-х годах эта реформа стала обязательной для всех школьников, которые обучались по государственному учебному плану. Надежда иметь возможность осуществить в ребенке наряду с логицистическим включением и психологический генезис математических понятий показала себя далеко несодержательной и приводила в отдельных случаях к особого рода неуспеваемости, которую нельзя об'яснить, исходя из конституции ребенка.
Наряду с разными точками зрения, которые следовало бы здесь затронуть, хотел бы коснуться одной, показавшейся мне очень важной в отдельных случаях. Она поднимает много вопросов. В период "теории множеств" были дети, сопротивлявшиеся восприятию требуемых мыслительных форм. Эти мыслительные

модели, выведенные из логицизма, должны были ввести ребенка в формальную логику, "материализованную" логическими блоками. Были особенно способные дети, которые неосознанно не хотели развиваться с помощью формально логического обучения. Они спасались неуспеваемостью в математике. Таких детей можно было всегда легко узнать, потому что они сразу становились способными и готовыми к положительным результатам при использовании методики обучения, пронизанной духовно. В этом можно увидеть своего рода борьбу за человеческое мышление, за интеллект.

г) Смена языка превращается в проблему, ставшую актуальной в Германии из-за эмигрантов, рабочих-иммигрантов и т.п. из не немецкоязычных стран. Мое внимание привлек такой случай с одним учеником Вальдорфской школы: с родителями-немцами он жил в Южной Африке и учился в англоязычной школе. Когда он был во втором или третьем классе, семья вернулась в Германию. В разговорном языке при этом не возникало никаких трудностей, так как в семье говорили по-немецки. Но значительные трудности возникали в арифметике, отсутствовавшие в Южной Африке при преподавании на английском языке. Та же проблема возникала затем у детей иностранцев и переселенцев. Среди них было много детей, испытывающих неожиданные трудности в обучении математике.
Кто имеет контакт с иностранцами, может заметить, что даже при хорошем знании немецкого языка большей частью то, что связано с числами и математическими действиями, продолжает выполняться на родном языке: будь то официант в каком-нибудь итальянском ресторане, считающий по-итальянски, или англичанин, набирающий номер телефона и проговаривающий его потихоньку по-английски. Счет встречается в разговорной речи очень в небольшом количестве, поэтому не тренируется на языке. Привычки, усвоенные в первые школьные годы, как правило, до значительно позднего возраста определяют элементарные навыки в счете. Лишь с помощью специальной тренировки можно добиться здесь некоторого перелома. Условия задач даются в таком счете посредством рисунков или на общепринятом разговорном зыке. Подобные опыты были очень успешны. Многие дети приобретали новую уверенность и могли значительно улучшить свои результаты.
Так как обычно Вальдорфские школы также посещаются детьми иностранцев, на это нужно обратить внимание. И относится это прежде всего к приему не в первый, а в более старшие классы. Нельзя недооценивать даже простую перестановку слов в числительных - twenty-one - в английском и einundzwanzig в немецком. Если на занятиях зыком счет проходят примерно параллельно с основным уроком, то можно обратить внимание

на эти трудности и донести их до сознания детей[24].

д) К сожалению имеются и специфические вальдорфские причины отставаний в математике: прежде всего это упор на ритм. Как уже было сказано выше, при счете бы работаем с различными ритмами, мы их выбиваем ногами, руками или изображаем как-то по-другому. При одностороннем применении это может привести к особого рода трудностям, на которых я хотел бы остановиться поподробнее из-за актуальности этого вопроса для нас.

В течение прошлых лет мне неоднократно представляли детей, показывавших при совершенно нормальных способностях заметное отставание в математике, усиливавшееся с третьего класса. В таких случаях я проверяю развитие моторики - на этом вопросе мы еще остановимся поподробнее. Если у ребенка нет, насколько могу судить, особых отклонений, то я спрашиваю его: Сколько будет 6 · 7? и наблюдаю за тем, как ведет себя ребенок. Если ребенок, пусть даже с помощью пальцев, называет ряд числа 7, и, дойдя до 6 · 7, отвечает 42!, - я делаю вывод, что имеет место дидактическая ошибка. Во втором и даже в первом классе треть детей приходит к тому, что не надо перечислять весь числовой ряд умножения на 7, чтобы найти решение. Некоторые учителя считают подобный переход само собой разумеющимся и рассматривают свое преподавание как успешное, когда примерно третья часть детей следует за ним без дальнейшего руководства. Но ребенок, проговаривающий весь числовой ряд, безнадежно попадает в отстающие. Иногда (при небольших сомножителях) он будет делать успехи, но в большинстве случаев будет не успевать. Затем он перестанет поднимать руку, так как уже очевидно не может ответить на то, что спрашивает учитель.

Чтобы преодолеть возникший здесь барьер, я спрашиваю ребенка: "Какие задачки на умножение ты мог бы сразу решить?"

24. Ср. Э.Шуберт "Модернизация преподавания математики", Штутгарт,1971 также: "Воспитание в компьютерном обществе", Штутгарт,1990

- "Никакие. Я не умею", - отвечает ребенок. "Ну, этого не может быть. Мы посмотрим, что ты можешь. Ты можещь сразу сказать, сколько будет 10 · 7?" - "А, 10 · 7 будет 70." Большинство детей еще может сказать, что 11 · 7 = 77 и 2 · 7 = 14. Затем пишу задачи по таблице умножения по порядку друг за другом и подчеркиваю, какие результаты ребенок может назвать сразу. Потом говорю: "Так, а теперь заметь: 35 = 5 · 7 (или 7 · 5 = 35). От ребенка требуется, таким образом, отметить другой результат умножения. Опрос проводится и с помощью других задач на умножение до тех пор, пока ребенок не приобретет уверенность. Это ведет к тому - а у меня это неоднократно происходило - что ребенок вдруг посмотрит на Вас и скажет: "Это так просто ?" Ребенок уже долгое время страдал от того, что он неуспевающий, ибо не был совершен осознанно и надлежащим образом переход от "*ритмической памяти*" к "*временной*".

Мы уже сделали вывод, что именно на уроках математики учитель должен тщательно следить за переходом от моторной активности через ритмическое говорение к индивидуальным умениям и знаниям. Это процесс, который - я сказал бы - должен подниматься от конечностей и центральной части организма к голове. Ребенок должен иметь твердое понимание 7 · 5 = 35, не произнося перед этим никакого стишка. Если удается управлять этим процессом образования мыслительной памяти из физического тела, то мы имеем удивительное средство для преобразования отношения душевно-духовного в отношение телесно-физическое[25]. Математика приводит потом к освежающей бодрости и тому уверенному умению, которое характеризует хорошее преподавание этого предмета.

Все эти дидактически обусловленные отставания в математике являются следствием психологического барьера, т.е. в собственном смысле не существует отставаний, обусловленных конституцией ребенка. Чтобы преодолеть барьеры, следует рекомендовать вглядываться в причины, анализировать трудности с точкия зрения дидактики и психологии, поддерживать ребенка путем положительного оценивания достигнутых результатов.

ПСИХИЧЕСКИ ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ОТСТАВАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

Наряду с барьерами, вызванными дидактическими ошибками, существуют трудности, обусловленные чисто психологически. Чаще всего они проистекают от поведения социального окружения.

25. См. сноску 23, 1-й доклад

Ребенок теряет уверенность, если дома постоянно говорится о его ошибках, если дома его принуждают к учебе и хорошей успеваимости, у ребенка возникает страх перед неуспеваимостью, которая может быть следствием дидактической ошибки. Такие психические трудности могут привести к полной скованности и даже к физическому оцепенению, если требуется решить задачу.

Подобный случай мне встретился в следующей форме: речь идет уже о достаточно опытной коллеге, успешно преподававшей многие годы. Когда ее вызвали решать задачу во время одного курса, вдруг появились старые страхи, которые действовали сковывающе, и даже самая простая задача при этом оказалась неразрешимой. Как вы снилось потом из разговора с ней, в первом классе она перешла в другую школу с другой методикой преподавания. Результатом стали травмирующие нарушения, оставшиеся непреодолимыми. Если бы знали об этих проблемах, то находили бы их чаще, чем хотелось бы. Я не считаю абсолютно точной мою оценку, но предполагаю, что среди взрослых примерно четверть с нарушениями, вызванными неуспеваемостью по математике в школе. Математика как ни один другой предмет может стать источником переживаний из-за неуспеваимости, отказа от возможных успехов, страха до оцепенения в дальнейшей жизни при требовании математического решения. Речь идет об *арифмофобии*. Она может превратиться в школе в серьезную проблему, так как ребенок не может, как взрослый, уклониться от решения. Помочь в данном случае, по моему мнению, можно только посредством позитивной поддержки успехов.

Так как возможно, что преподаватели математики в старших классах могут вызвать у ученика решительные изме-нения, я мог бы им напомнить один важный совет, данный Георгом Хартманом на семинаре вальдорфских учителей в Дорнахе. Он сказал: "Если Вы, как учитель старших классов, получили девятый класс, опасаетесь показать классу, что он ничего не может, наоборот, покажите классу, сколько он может! Обсудите, например, с классом вопрос, какая задача является *самой простой*. На вопрос о самой простой математической задаче ученики часто отвечают: $1 + 1 = 2$! Можно спросить о более простой задаче. Тогда будет предложено, к примеру, $1 \cdot 1 = 1$. Эта задача в известном отношении еще проще, так как в ней содержится только одно число. В задаче $1 + 1 = 2$ мыслится уже два числовых понятия, а именно 1 и 2. Есть еще более простая задача? Называется:

$$0 \cdot 0 = 0,\ 0 + 0 = 0,\ 0 \cdot 1 = 0,\ 1 \cdot 0 = 0$$

Как математик Вы видите, как из этого вопроса о самой простой

математической задаче можно развить полезный разговор о нуле и единице. Я постоянно начинал с этого вопроса урок в девятом классе, и класс активно включался в работу. Безусловно, каждый может внести нечто свое. Учитель выигрывает вдвойне: во-первых он может похвалить класс за живое участие и, во-вторых, он получает возможность поговорить о нейтральном элементе сложени и умножени - а именно, о нуле и единице, а это очень важный момент математики.
Остается указать на широкую область общей дебильности, которая исследуется в отдельных произведениях относительно успехов в математике. При этом делается вывод, что среди дебилов также встречаются высокоодаренные математически люди, особенно среди эпилептиков. Вайншенк описывает целый ряд подобных случаев, когда именно при таких заболеваних проявляются особо высокие способности в счете. Наряду с давно изданной, но до сих пор используемой книгой Курта Вайншенка "Нарушения в счете" следует сослаться на книгу Ханса Гриссмана и Альфонса Вебера "Специфические нарушения в счете. Причины и лечение". Она возникла на основе психологической и психиатрической работы с детьми.

НАРУШЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ФИЗИЧЕСКОЙ КОНСТИТУЦИЕЙ

При таких нарушениях речь идет о тех случаях, к которым мы хотим обратиться прежде всего как учителя, интересующиеся терапией. В этой области также существует большая потребность в исследованиях. К сожалению, у нас нет возможности проводить такие исследования в необходимом объеме из-за отсутствия сотрудников и средств. Поэтому здесь может быть дан только основной понятийный план этих исследований.

Главный вопрос, который ставится перед любым исследованием и терапевтической работой с математической неуспеваемостью, гласит: *на чем основывается математическое умение*? Этот вопрос взаимосвязан с вопросом : *что такое математика*?
Когда задаются вопросом о возникновении математики, находят совершенно разные ответы. Основополагающие теоретики

часто устанавливают связь с логикой. Математика появляется в этом случае как специальная часть логики. Наряду с этим существуют и другие подходы, например, конструктивизм и т.д. Как уже выяснилось на примере реформы преподавания математики, эти подходы не создают в ребенке несущего фундамента для развития математического мышления, даже если они описывают справедливо некоторые аспекты.

С другой стороны, развитием математического мышления со школьниками старшего возраста занимался вместе со своей школой генетического и психологического развития упомянутый уже выше психолог из Женевы Жан Пьяже. Были проведены попытки сделать плодотворным и результаты исследований психологии развития для структуры обучения. Также и эти подходы в реальности не имели успеха, и Пьяже сам позднее отошел от них. Он сделал вывод, что в мышлении ребенка существуют разные ступени развития, но из своего понимания математики он не смог дать дидактически пригодный подход к развитию способностей. Я подчеркиваю это, хотя еще и по сей день в начальной школе многих стран практикуется основанная Пьяже дидактика начального обучения счету. Важным в его исследованиях представляется мне для нашей темы, как он видит понятия числа и математической способности.

Другой взгляд на происхождение математики содержится в ряде работ по нейропсихологии; их можно найти у Луриа и его школы. В своей книге "Работающий мозг" Луриа упоминает, что ориентация тела и способность считать, удивительным для него образом, исчезают при повреждениях мозга. Эти и другие для них загадочные взаимопривязки и независимость различных результатов можно хорошо понять исходя из антропософского учения о чувствах.

Если взять, насколько это возможно, весь спектр взглядов на содержание и возникновение математики и их связи с человеческим организмом со стороны нейропсихологии, развивающей психологии, логики, то исследования Рудольфа Штейнера по этому вопросу становятся особенно интересными; в них просматриваются конкретные подходы к проблеме нарушений как со стороны дидактики, так и для лечебной педагогики.

Сначала должен быть сформулирован тезис о возникновении математики. *Счет основывается на внутренней деятельности чувства собственно движения.*

Для об'яснения - один опыт из практики. Когда я преподавал в Мюнхене в 6 классе, то нарисовал однажды на доске две прямые и спросил: "Пересекутся ли эти прямые?" (рис. 19) Один подвижный ребенок-сангвиник поднял руку и сказал к моему удивлению: "Нет". Незадолго до этого я получил диплом математика, и не ожидал, что какой-то ребенок сможет ответить "нет". В это время вызвался отвечать еще один. К моей полной растерянности он тоже ответил: "Нет". Что делать учителю в подобной ситуации? Он ищет поддержки с помощью другого вопроса: "А кто все-таки думает, что они пересекутся?" Тут одна девочка поднимает руку и говорит: "Они пересекутся". В ответ первый мальчик кричит : "Ну и где же?" Девочка показывает на место около доски. Мальчишка громко засмеялся и сказал: "Нарисуй!" (Было бы интересно рассказать, как эти ребята спорили в десятом классе о бесконечном в проективной геометрии. Там тоже была эта девочка, сделавшая возможным прогресс для класса.)

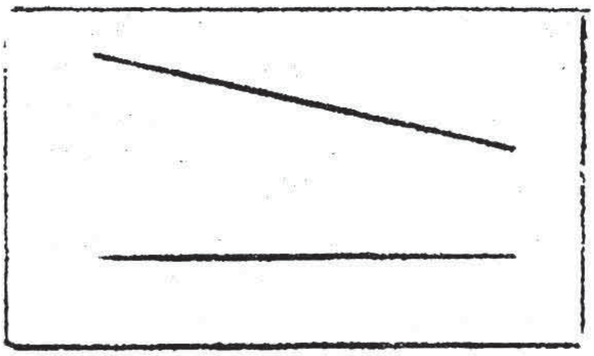


Рис. 19

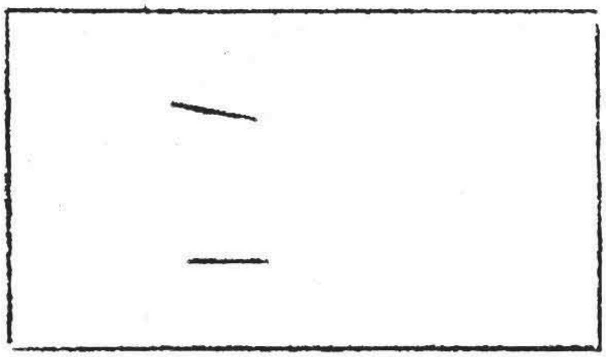


Рис.20

Рассмотрим теперь проблему пересекающихся прямых поподробнее: насколько правы эти дети, когда утверждают, что прямые не пересекутся, и насколько права девочка? Рассмотрим весь процесс в деталях. На доске воспринимаются цветовые поверхности. Это серо-зеленая поверхность доски и белая поверхность от мела. Узкая белая поверхность от мела дает возможность проследить *движение* глазами. Это собственно движение глаза контролируется чувством собственно движения и чувством равновесия. Я предполагаю, что при нарушении чувства равновесия определение точки пересечения вне поверхности доски становится невозможным. Девочка смогла, как и мы тоже можем, определить точку пересечения благодаря тому, что самостоятельно продолжила движение, вызванное белым мелом, отстранившись при этом от впечатления цвета.

Даже если дан самый маленький кусочек "прямых" (рис. 20), можно определить точку пересечения. Чувство цвета дает нам качественные различия цветов. У нас вызывается стимул к движению на границах различных цветов. Это собственно движение контролируется чувством собственно движения (кинэстетическое чувство) и приводится чувством равновесия в соответствие с положением тела. Восприятие чувства собственно движения направляется уже больше не на цветовую поверхность, а *на деятельность как таковую*, которую я производу в виде движения моего глазного блока.

"Математическое восприятие" находится, следовательно, не во внешнем мире, а в собственном организме. Поэтому содержание восприятия имеется в наличии там, где чувство цвета не располагает содержанием, имеющим значение для конкретного вопроса (около доски). Различие между детьми состояло очевидно в том, что одни из них, исходя из сознания, очень сильно были привязаны к чувству цвета; девочка же смогла осуществить чистое переживание движения при продлении линии за край доски до содержания представления.

Если для нас чувство зрения имеет чрезвычайное значение, то оно все же не является решающим при передаче математических свойств. У того, кому необходимо воспринять конкретное пространственное геометрическое содержание, должен быть вызван процесс движения в памяти. Как это происходит - достаточно все равно. В течение трех лет я вел к выпуску одну слепую девочку. В этот момент было как раз очень много геометрии. Все фигуры ей чертила на ладошке ее соседка. По осязанию в его временной продолжительности ей удавалось составлять представление о фигурах: прямых, окружностях, эллипсах, гиперболах, их точках пересечения и т.д.

Чувство собственно движения, с помощью которого мы создаем и воспринимаем математическое содержание, нуждается при передаче извне в одном или более чувствах, которые направлены во внешний мир. Для нас, видящих, глаз является двуфункциональным или даже полуфункциональным органом. Глаз как физический орган - носитель многих чувственных функций. Он не только орган чувства цвета, но и одновременно очень тонко контролирующий моторный орган. Если мы проследим основные органы нашей моторики снизу вверх, то мы встретим их в ногах, руках, органах говорения и, наконец, в глазах. Если ноги имеют дело с трехмерным волевым передвижением в пространстве, то глаза с их моторными возможностями к вращению, к скрещению оптической оси и аккомодации (резкости) имеют дело с познанием пространства.

С точки зрени антропологии математика возникает там, где внешнее движение находит внутреннее продолжение. Мальчики моего класса, о которых шла речь, как выраженные сангвиники, были высоко одаренными со стороны моторики, но тогда еще не в равной мере способные отстраниться от внешнего впечатления и проследить движение исключительно внутренне. С одной стороны, существовала сильная привязка к чувству зрения, с другой стороны - небольшая тенденция привести тело к необходимому покою, чтобы создать внутреннее движение на внутреннем экране представлений. Определение точки пересечения прямых рядом с доской примыкает к конкретной пространственной ситуации, но оно не должно больше представлять в ней внешнее данное. Собственная математическая деятельность должна отделяться от этого представления, а движения могут осуществляться во внутреннем независимо от внешнего пространственного расположения или пространственной связи.

Фактически начерченная мелом прямая еще никогда не была прямой в математическом смысле. Что же является материалом геометрии? Из чего сотканы геометрические содержания? Это волевые лучи нашего внутренне созданного движения, которые мы связываем с помощью чувства равновесия. Происходит это с помощью Я, инкарнированного в физическом теле. Только благодаря деятельности нашего Я можно привести в сознательное соотношение физическое тело и окружающий мир, действующие закономерности - к чисто внутреннему взгляду, пронизывая их мышлением. Если нарушается чувство равновесия, то Я исторгается из физического тела. Раньше говорили: небо разверзлось над тем, у кого нарушалось это чувство. Усвоение математики в подобной ситуации больше уже невозможно.

Приведенные точки зрения на возникновение математики относилось в первую очередь к геометрии. А как же происходит осознание чисел? При формировании понятия числа суждение играет несколько иную роль, чем в геометрии. Когда, например, я говорю: там сидят *три* человека, происходит следующий процесс: говоря "там", я заключаю и исключаю одновременно. Сначала я образую *единство* об'ектов, определяющееся по их количеству. В начале любого числового определения, следовательно, стоит образование единства (= "множество" в математическом смысле).

Излагая современным языком: образование множества предваряет каждое определение числа. Множество производит единство исчисляемых об'ектов. Следовательно, если говорится: "Там сидят три человека", то нашим мышлением мы производим одновременно включение и исключение. В этом процессе принимает участие в известном смысле и чувство жизни, если единство создается лишь с помощью понятия и суждения. Понятие может быть направлено на чувственное или снова на другие понятия. В первом случае мы определ ем количество воспринимаемых об'ектов; второй возникает, например, тогда, когда возникает вопрос о количестве простых чисел в промежутке от 1 до 100. Как уже говорилось выше, определение числа предполагает абстрактное мышление. От применяемого понятия зависит, к какому числу мы подойдем. Если мы, например, спрашиваем: "Сколько человек находится в помещении?", то мы получим другой ответ, нежели, если бы мы спросили: "Сколько там мужчин?" или "Сколько там стульев?". Помещение, в котором мы находимся, заключает в себе число не как таковое, а позволяет нам определить число относительно какого-то *понятия*. Если мы образовали единицу рассматриваемых об'ектов с помощью понятия, то мы спрашиваем затем об "*индивидуализации*" этого понятия. Как часто удерживается понятие с помощью восприятия или посредством других понятий? Если я говорю какой-то группе людей: "Вас семеро", то создаю с помощью "Вас" понятийный и пространственный контекст, в котором единство возникает через мышление. Если я подхожу с понятием "человек" к включенным об'ектам, то оно индивидуализирует каждого отдельного человека. В каждом случае, когда удерживается понятие восприятия, происходит индивидуальное выражение (которого не содержится в общих понятиях). Если же я обращаюсь к восприятию, то произвожу в процессе усвоения протекающую во времени моторную активность. Если хочу направить свое внимание не на свойства определенных людей, а на их число, то я должен совершить индивидуализацию понятия, обратившись не к выражению содержания, а к процессу усвоения.

Чтобы выразить сказанное несколько нагляднее, предста- вим, что кто-то смотрит в подзорную трубу, а мы смотрим на то, как этот человек фиксирует с ее помощью незнакомые об'екты. Мы не можем знать, что он видит через трубу. Но при этом, мы можем наблюдать процесс движения, производящийся другим человеком при восприятии об'ектов. Этот процесс происходит на месте наблюдения. Благодаря этому, мы знаем то, что человек зафиксировал три различных об'екта - а не то, что, например, он увидел три корабля далеко в море. Корабли мы узнаем в мире, а число в нас самих, когда мы активны с точки зрения моторики при восприятии предметов.

Таким образом, математика узнается в деятельности как таковой. К самому прекрасному в математике относится то, что мы возвращаясь к нашей исконной деятельности, познаем мировые законы. Мы все знаем, насколько суб'ективным могут быть наши оценки, например, когда речь идет о вкусе и запахе. Если кто-то говорит: "Селедка не вкусная", то это кажется совершенно суб'ективной оценкой. В действительности же говорящий охарактеризовал лишь самого себя через свое отношение к сельди. Но если кто-то говорит: "Здесь лежат три сельди", это значит - независимо, каково наше мировоззрение, какие у нас пристрастия и склонности - что их в это время три, если мы правильно оценили; фактически по таким вопросам не возникает разногласий между людьми различных взглядов.

О возникновении математики необходимо было поговорить, так как невозможно предлринять правильную терапию и также диагностику, если не будет описано место возникновени математики. Тот, кто говорит, что математика есть абстракция чувственного видения, не понимает ее и не сможет найти правильный подход ни в терапии, ни в диагностике. В начале действительной работы над проблемой отставаний в математике следует указать на разворачивающиеся в ребенке и взрослом чувственные процессы, когда взаимодействие чувств, направленных во внешний мир (таких, как чувство цвета и осязания) с чувствами, обращенными к физическому телу (такими, как

чувство равновесия и чувство собственно движения) требует особого внимания.
Если нужно проверить у ребенка органические предпосылки для развития способностей в математике, следует иметь в виду следующие, связанные друг с другом этапы.

Первый этап

Сначала следует продиагностировать вообще развитие и созревание чувств в их индивидуальной структуре. Некоторые чувства относительно хорошо развиты уже при рождении (обаняние, осязание), в то время как другие формируются постепенно (чувство равновесия, чувство собственно движения). Для вопроса о формировании математических способностей особую роль играет наблюдение за развитием моторики.
Следует рассматривать всю область мелкой и грубой моторики. О многом говорит походка ребенка. Как он бегает? Как ставит ноги? Как двигаются при этом его руки? В лечебно-педагогических интернатах можно по различным параметрам отличить здоровых детей от детей, нуждающихся в лечении, и, в частности, по картине движения при ходьбе. Очень быстро проявляются даже самые легкие нарушения в не совсем гармоничном взаимодействии отдельных движений. Созревание образа движений человека оказывается чрезвычайно чувствительно по отношению к душевным аномалиям. Простым способом контроля взаимодействи движений, *координации* у ребенка является просьба снять ботинок. В случае нарушения моторики, ребенок сразу садится для того, чтобы разуться. Обратитесь к нему с вопросом: "А ты можешь разуться, стоя?" В этом случае ребенок возможно прислонится к чему-нибудь и постарается снять ботинок. Надо очень постараться, чтобы выравнять имеющуюся слабую сторону. Затем обратитесь к нему с такой просьбой: "А теперь сними ботинок, ни к чему не прислоняясь", в этом случае может случиться так, что ребенок сразу упадет, как только поднимет ногу. Можно заметить, что он сразу начинает поднимать ногу, предварительно не сделав никаких допол-нительных для равновесия движений. Если мы поднимаем ногу, то мы двигаем не только эту ногу, но и все тело включаем в движение. Весь человек двигается скоординированно. Мускулы шеи, груди, спины, живота, ног - все активно участвует в процессе. "Учиться ходить" есть, следовательно, не развитие способности ставить одну ногу перед другой, это выражение гармоничного взаимодействия в нас как в человеке двигающемся. Учиться ходить значит, не учиться продвигаться вперед, это означает координацию движений всего тела. При этом создается *единство движений в человеке.*

У некоторых отсталых в математике детей этот двигающийся человек "распадается". И это первое, на основании чего рассматривается ребенок, отстающий в математике по причинам нарушений в конституции.

Другой не менее существенный аспект созревания моторики может быть проверен следующим образом. От ребенка требуется взобраться на стул. При этом наблюдают, какие движения будут производиться другими частями тела: двигаются ли руки так, что их движения помогают ребенку взобраться на стул, или подобной взаимосвязи не существует? Далее наблюдается движение головы, даже мимика и положение пальцев. При нарушенном развитии разнообразно проявляются так называемые "ассоциированные" движения, которые не находятся ни в каком физически осмысленном взаимодействии с производимым движением.

Между тем не следует переоценивать возникновение небольших ассоциированных движений. Ведь некоторые из нас, когда забивают гвоздь или фотографируют, высовывают кончик языка.

Далее, очень важную роль для развития математических способностей, что можно найти уже в довольно ранних работах Джонсона и Майклбаста, играет *владение схемой тела*. В Вальдорфских школах в ритмической части главного урока многое делается в этом направлении, дети должны быстро ориентироваться в собственном теле, когда их просят, например, положить правый мизинец на левое ухо, а указательный палец на кончик носа. Многое из практики преподавания познается и в его терапевтическом значении.

К диагнозу развития моторики относится также и наблюдение *латеральности*. В книге Эггерта/Кипхарда "Значение моторики для развития нормальных детей и детей с отклонениями" мы находим работу Фридхельма Шиллинга под названием "О методике определения латеральности". Эмпирическа работа показывает, насколько трудна на самом деле фундаментальная диагностика в этой области. Латеральность в известном смысле зависит не только от проверяемого органа (глаза, уха, руки), но также и от того, какая требуется успеваемость. Шиллинг получает непрерывную шкалу между лево- и правосторонностью, учитывая также работоспособность.

Многое по этой теме можно найти и у Деликато, который интенсивно занимался изучением взаимосвязи легастении и развития моторики, обнаружив при этом и роль развития латеральности. Здесь нет возможности описать работу подробно. Мне хотелось бы данной ссылкой обратить внимание на то, каким комплексным является одно лишь поле латеральности, развития сторонности. С точки зрения антропософской антропологии здесь нужно говорить о том, как Я охватывает физическое тело и освободившиеся при смене зубов эфирные силы. Некоторые вопросы этой темы уже разработаны в антропософии.

Необычные явления в моторике могут проистекать от ранней интеллектуализации. Можно почти утверждать, что виноваты в этом родители. У детей наблюдаются явления от легкой скованности до зажатости, "столкновений" в мире вещей и т.д. Но при этом могут проявиться именно особое фиксирование чисел или в положительном случае заметные математические способности. Если в одном случае (внутренний процесс требует еще более подробного обсуждения) трудно найти достаточное основание в самом организме, то в последнем обнаруживается с самого начала сильное фиксирование с пространственными и числовыми представлениями на внутреннем уровне. Во взрослом возрасте именно у математиков более часто проявляются неловкость в движениях. Если это случается, то думаю, что это связано с особо выраженной жизнью представлений, а не восприятий. Некоторые студенты утверждают, что они издалека могут отличить студентов - математиков от других студентов: им характерна легкая бледность, опущенный взгляд, мелкие шаги и часто молчаливость. Это замечание - если оно все же верно - не должно использоваться как аргумент против утверждения, что математические способности взаимосвязаны со здоровым развитием моторики. Скорее это наблюдение указывает на то, что надо иметь в виду второй этап в развитии математических способностей.

Второй этап

Вступая в школьный возраст ребенок достигает той ступени развития, когда часть эфирного тела, находясь в связи, в первую очередь, с нервной системой, становится относительно свободной и служит для душевного в качестве основания жизни памяти и представлений. Этот шаг, который мы называем "рождением" эфирного тела или интеллекта, еще не является переходом к причинному мышлению так, как его можно отчетливо проследить в период, предшествующий половому созреванию. Задача воспитания состоит в том, чтобы охватить с помощью Я волевым образом ставшие свободными эфирные силы. Исследования Пьяже данной возрастной ступени очень отчетливо показывают результат этой измененной душевно-физической конституции. Ступень уже упоминавшихся "конкретных операций", о которых он говорит, показывает, как жизнь представлений может идти независимо от чувственных переживаний: протекания представлений могут во многих случаях становиться обратными, что внешне совершенно невозможно; в представлении могут быть испробованы самые различные пути к одной цели и т.д. Если в этом возрасте овладение с помощью Я силами памяти и представлений происходит неправильно, то возникает опасность развития чисто ассоциативного мышления. Тогда одно представление бесконтрольно будет тянуть за собой другое. В экстремальных случаях развивается полностью патологическая, двигающаяся от ассоциации к ассоциации жизнь представлений любого волевого руководства. Именно счет в уме имеет педагогическую задачу упорядочить протекание представлений и пронизать их Я.

То, что было описано у Пьяже в качестве "конкретных операций" является внутренним процессом обращения с пространственными качествами и качествами движения. Таким образом, можно говорить о протекании во внутреннем чувственных процессов моторики. То, что возможно для этих чувств, становится возможным к школьному возрасту для самых различных чувств, различных, разумеется, индивидуально, а именно: управление чисто внутренне чувственными представлениями. Так, представления цвета, звука, запаха, вкуса и многие другие могут управляться внутренне. Кто хочет стать поваром, должен уметь создавать представлени вкуса и запаха, художник должен обращаться во внутреннем с цветовыми представлениями, музыкант со звуковыми. Так и математик должен уметь обращаться чисто внутренне с пространственными и двигательными представлениями. Он может не только внешне репродуцировать пространственные процессы и процессы движения, но и должен уметь активно формировать их внутренне.

Если принимать во внимание названные выше два этапа преподавания математики в начальных классах, то начинать каждый урок надо физически активно, а заканчивать его успокоением тела и чисто внутренними представлениями движения и чисел. В данном случае применяется основанная на антропологии дидактика математики.

Интересной и для усвоения чисел важной промежуточной ступенью между восприятием и чисто внутренним процессом движения является осязание собственного тела. Если, например, на спине чертится какая-то фигура, то, с одной стороны, возникает непосредственное впечатление осязания; с другой стороны, эти впечатления впоследствии должны сопровождаться внутренним процессом движения, если форма узнается. Непосредственно телесное сопровождение движения возможно не сразу. Интересно было бы проверить, сопровождается ли рисуемая на спине фигура небольшим напряжением мускул через мускулатуру глаз.

Точно также внутренне протекает сопровождение движение, когда притрагиваются к пальцам рук или ног, чтобы определить их число. При определенных обстоятельствах это внутреннее осязание может быть тяжело нарушено. Я вспоминаю один встретившийся мне уникальный случай с пятнадцатилетней девочкой, учившейся в шестом классе, которую нужно было проэкзаменовать. Ее способности в математике были на уровне первого класса. Что я сделал? Я попросил девочку положить руку на стол, закрыл три ее пальца и спросил: "Сколько там пальцев?" Она посмотрела на меня непонимающе и сказала: "Не знаю". Я открыл пальцы, другой рукой она пересчитала их: "Один, два, три. Три пальца". Затем закрыл только два пальца и снова спросил об их количестве. Девочка вновь ответила, что не знает. Я открыл пальцы, она посчитала их, как совсем посторонние предметы: "Один, два. Два пальца". Надо было попытаться проникнуться тем, как эта девочка осязала свое тело изнутри. Совсем не так сильно, чтобы уметь образовывать внутреннее представление. Было такое чувство, что ее ладони как бы обвязаны. Интересно, что дети с "пальцевой агнозией" рисуют человеческие руки без растопыренных пальцев (рис.21 и рис. 22).

В смягченной форме пальцевую агнозию мы можем наблюдать на наших пальцах ног. Если бы нам надо было определять числа по пальцам ног, то мы бы делали иногда ошибки, так как многие люди с трудом различают третий и четвертый палец ноги.

Рис. 21
(нормально)

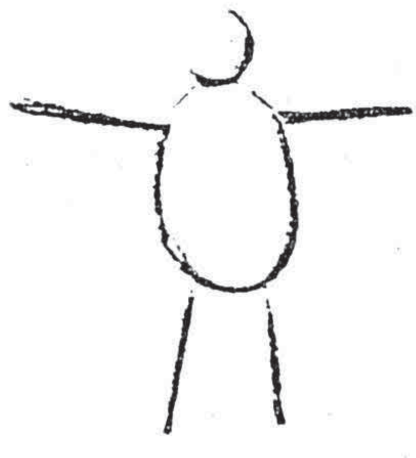


Рис.22
(с нарушением)

При простом тесте с пальцами рук проверяют, с одной стороны, может ли ребенок назвать каждый палец, к которому прикасается, с другой стороны от него требуется активно двигать названными пальцами. Тренировку способности восприятия пальцами рук иногда можно начинать очень рано с помощью загадок с участием пальцев рук и ног. Тем самым ребенок становится бодрствующим и на своей периферии. Он становится бодрствующим там, где организм сам многообразно расчленяется. Разве не интересно проследить, как, например, плечевая кость расчленяется вначале на двуединство - локтевую и лучевую кости, затем - на кость запястья и далее на все большее количество. Уже упомянутая работа Э.Краника[26] о зна-

26. См. сноску 15.

чении для математики внутреннего осязания тела содержит много важного материала по этому вопросу. То что здесь было лишь слегка затронуто, рассмотрено там подробнее по многим аспектам.

К теме определения числа посредством внутренних двигательных процессов по непосредственным впечатлениям других чувств существует целый комплекс упражнений, который может использоваться как раз для детей, отстающих в математике. Выше мы назвали это "*числовыми загадками*". Каждый ребенок имеет свою индивидуальную структуру чувств. Так же, как каштан берет из почвы нечто совсем иное, чем дуб, так и человек своим организмом чувств воспринимает из мира впечатления различной значимости. Оптически ориентированные дети переживают мир иначе, нежели акустически ориентированные дети. Если определение числа или его представление вызывается извне, то сначала, конечно, нужно обратиться к чувству, направленному вовне. Воспринятые чувственные впечатления определяются затем через внутреннее чувство собственно движения числа. Это дает разнообразные возможности для разных детей. В отдельных случаях можно заинтересовать ребенка различными сторонами чисел, если обратиться к нему через подходящие внешние чувства. Можно определять числа с помощью чувства зрения, слуха, осязания, тепла, вкуса.

Эти и другие упражнения связывают первый и второй этап при формировании математических способностей: непосредственные чувственные впечатления сопровождаются внутренними представлениями движения, и таким образом создается число. Очень интересно, как дети во время таких упражнениий, с одной стороны, обращаются к чувственному восприятию, а с другой, сильно сосредоточившись, стараются внутренне охватить многочисленные впечатления. При этом постоянно тренируются с помощью концентраций и восприятие, и формирование представления.

К внутреннему процессу обращения с чувственными представлениями, степень которого возрастает к школьному возрасту, относится еще один важный процесс, который, насколько мне известно, мало попадает в поле зрения: внутренний процесс чувственной деятельности делает также возможным на отдельном чувственном качестве направленное усвоение со стороны Я. Противостоя непосредственно миру, мы воспринимаем его посылы ко многим чувствам. При этом на передний план в отдельных случаях выходят одни качества чувств, в то время как другие остаются скорее неосознанными. Если мы, например, на ночном небе видим сияющую звезду, то мы воспринимаем ее цвет и свет. Эти чувства выходят на передний план. Относительно неосознанным остается отношение, которое мы создаем с помощью чувства равновесия к нашему собственному положению в пространстве: мы видим звезду где-то впереди справа. К направленному овладению сферой чувств со стороны нашего Я принадлежит и то, что мы можем выборочно сосредоточиться на впечатлении света и цвета или на положении в пространстве. Пример на рис. 19 показал, что у мальчиков растворились цветовые впечатления, а девочка могла уже отчетливо воспринять это разделение. О полном созревании внутреннего овладения чувственными качествами говорит, таким образом, способность *дезинтегрировать* чувства. В нормальном случае это завершается к двенадцати годам, т.е. до того периода, пока не будет достигнуто раздельное друг от друга овладение, например, представлениями формы и положения в пространстве. Теоремы конгруэнтности в элементарной геометрии предполагают усвоение форм независимо от пространственного положения. Если это разделение еще не достигнуто, то изучение этих элементарных теорем имеет мало смысла. Подробное изложение чувственной деятельности в геометрии можно найти в другой работе[27].

Третий этап

Если с помощью здорового созревания моторики и умения владеть волевым образом двигательными, пространственными и числовыми представлениями даны органические предпосылки для овладения математикой, то с помощью *абстрактного* мышления могут *познаваться и выражаться* отношения между об'ектами. При этом возникает математика как таковая, изображающая и описывающая не только специальные фигуры, но и связывающая их, формирующая общие законы и исследующая их логическую зависимость. Именно последнее выходит для математика на первый план. Мы не будем останавливаться на этом подробно, так как это является предметом математического образования.

Итак, обозначены три основные ступени формирования математических способностей: от овладения чувствами с физической точки зрения через душевное управление внутренней деятельностью чувств и образов представлений до духовного овладения об'ективными закономерностями. На каждой ступени возможны задержки и неправильное развитие. Указанные понятийные рамки позволяют изучить самые различные причины и вывести из этого познания терапевтические методы.

Самые важные направления наблюдений и упражнений следует каждый раз четко суммировать, предпослав этому констатацию полного и частичного отставания.

27. Э.Шуберт. Геометрические и анропологические основы рисования форм. В книге М.Юннеман. Рисование форм, Штутгарт,1992

Методические и психологические барьеры исключаются. Затем рекомендуем контроль развития моторики. Учитываются следующие моменты:

- развитие движений по грубой и мелкой моторике
-формирование координации; проявляются ли ассоцироанные движения
- владение схемой тела и пальцев
- состояние развития латеральности
- имеющиеся спазмы и подобные аномалии

На следующем этапе следует проверить, насколько далеко на внутреннем уровне происходит усвоение чувственных процессов и представлений. В зависимости от возраста различные результаты могут оцениваться как нормальные, например:

- узнается ли одинаковость фигур в различном их положении?
- отделяется ли числовое представление от внешне выраженного количества?
- возможно ли овладение числами независимо от визуальных или других чувственных представлений?
- происходит ли особое примыкание чувств?

Короче: следует ли исследовать внутреннюю подвижность при использовании форм и чисел.

Переход к математическим вычислениям при выраженных числовых отношениях является началом собственно духовной математической деятельности. Здесь следует проверить, где ребенок недостаточно активен на внутреннем уровне, где представление остается слишком привязанным к наглядному изображению и т.д.

Оба аспекта - физическая и душевная подвижность - требуют терепавтических подходов к организму, при этом в первую очередь следует обратить внимание на координацию и направленное разделение деятельности чувств. Если мы имеем здоровое развитие или терапевтические меры выровняли нарушенные отношения, тогда и духовная деятельность сможет пронизать и упорядочить содержания, находящиеся во внутреннем представлении.

МАТЕРИАЛЫ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

В заключении хотелось бы обратиться под особым углом зрения к вопросу о применении в преподавании различных материалов.
Именно в корректирующем воспитании можно часто наблюдать, что при стараниях приблизить детям в какой-либо форме математическое содержание, происходит сильная материализация и обращение к внутренним процессам. Еще сильнее, чем современная дидактика математики, практикующая чувственно привязанную математику с ее логическими блоками, палочками и многими другими наглядными средствами, лечебная педагогика искала выход в материально ориентированной методике.

Этому подходу следует противопоставить высказывани Рудольфа Штейнера, из его второго доклада цикла "Мир, земля и человек"[28], в котором он говорил о связи преподавания математики с лечебными силами в самом человеке.

"В этом восхождении к духовному в древние времена был здоровый элемент, и было бы хорошо, если бы люди вновь научились понимать это, тогда они бы поняли и великую миссию антропософского движения. В этой миссии нет ничего другого, кроме желания привести человека к духовным мирам, чтобы он снова мог заглянуть в миры, из которых пришел! В будущем над человеком уже не будет висеть сомнабулический сон - самосознание полностью сохранится и мощная духовная сила станет действенной в человеческой природе, и тогда овладение мудростью и взгляд в высшие миры снова будет тем, что сможет действовать на природу человека регулирующе и оздоровляюще. Сегодня эта связь духовного с тем, что лечит, скрыта настолько, что люди, непосвященные в глубокую мудрость мистерий, знают об этом немного; они совершенно не в состоянии наблюдать имеющие место сверхчувственные факты. Кто может видеть глубже, тот знает, от каких глубоко внутренних условий может зависеть лечение. Ну, например, человек страдает болезнью, имеющей внутренние причины, не от перелома бедра или испорченного желудка, так как в этом случае речь идет о

28. Рудольф Штейнер. Мир, земля и человек. Библ. номер 105, 2-ой доклад.

внешних причинах. Желающий глубже проникнуть в подобные вещи очень скоро увидит, что человеку, много и охотно занимавшемуся математическими представлениями, будут необходимы совсем другие условия выздоровления, нежели человеку, не любившему этим заниматься. Данный факт указывает на то, какая странная связь имеет место между духовной жизнью человека и тем, что является условием его внешнего здоровья. Конечно, я не хочу сказать, что математическое мышление лечит человека. Мы должны понять это несколько точнее: человеку, который может воспринимать математические представления, необходимы другие условия лечения, нежели тому, который не занимается этим. Возьмем случай: двух человек поразила совершенно одинаковая болезнь. В реальности это не случается, но гипотетически предлположить можно. Один ничего не хочет знать о математических представлениях, другой занимается этим интенсивно. Тогда в этом случае было бы совершенно невозможно вылечить математика теми средствами, которыми Вы могли бы лечить другого. И это совершенно реально.

Другой случай: совершенно разные условия выздоровления будут у двух человек, один из которых - атеист в самом плохом смысле, а другой - глубоко религиозный человек. Снова может случиться, что оба поражены одной болезнью. Но одними и теми же средствами Вы не вылечите религиозного человека и атеиста. Эти связи кажутся для сегодняшнего мышления - по меньшей мере большей части человечества - совершенно абсурдными. И тем не менее это происходит именно так.

Почему так происходит? Это об'ясняется тем, что совершенно разные явлияния на человеческую природу оказывают так называемые свободные от чувственности представления и представления, наполненные ею. Представьте на мгновение разницу между людьми, один из которых ненавидит математику, а другой любит ее. Один скажет: и обо всем этом я должен думать? Но я хочу иметь лишь то, что воспринимаю внешне своими чувствами! Однако для самой внутренней сущности человека большой потребностью является жизнь представлениями, которые нельзя созерцать, так же жить необходимо религиозными представлениями, ибо они тоже опираются на вещи, которые нельзя потрогать руками. Они несвязаны с внешним, материальным, и являются, одним словом, свободными от чувственности. Это - вещи, которые когда-нибудь, если взор все больше будет обращаться на духовное, окажут большое влияние на педагогические принципы. Возьмем пример простого представления: 3 · 3 = 9. Лучше всего это представление образуется у детей благодаря чувственно свободному образу. Не правильно слишком долго раскладывать друг около друга фасолины, потому что потом дети не смогут выйти из чувственного представлени . Если же Вы поступите, например, таким образом, что вначале, но совсем надолго, посчитаете с детьми на пальцах, а потом перейдете к чисто математическому мышлению, тогда это будет действовать на них регулирующе и оздоровляюще. Как мало разбираются сегодня в подобных вещах, мы видим по тому, что именно в педагогике происходит обратное. Разве не в наших школах появились счетные машины, которые об'ясняют на всевозможного рода шариках сложение, вычитание и т.д. для чувственного глаза? То, что должно восприниматься лишь духом, хотят, как утверждается, сделать подобнымм образом чувственно наглядным. Может быть это удобно, но тот, кто считает этот метод педагогичным, ничего не знает о той более глубокой лечебной педагогике, которая коренится в силе духовного. Человека, которого Вы приучаете с детства жить в чувственных представлениях, Вы не сможете вылечить из-за находящейся в нездоровых условиях его нервной системы, так же легко, как того, кто, начиная с юности, привык к свободным от чувственности представлениям. Чем больше Вы приучаете человека думать о вещах отстраненно, тем легче будет вылечить его. Поэтому согласно древним традициям было совершенно обычным делом давать всякого рода символические фигуры, треугольники, числовые комбинации. Цель этого была в том, чтобы наряду с обычным значением, которое эти вещи имели, оторвать человека от простой наглядности того, что изображалось. Если же, напротив, воспринимаю в нем высокое триединство человека, то это становится для духа оздоровляющим представлением".

Над этими высказываниями следует поразмышлять тому, кто хочет преподавать, исходя из антропософской антропологии. Разве мы не должны пытаться, наблюдая детей, имеющих трудности, идти путем от телесно-чувственного обучения через процесс внутренней переработки деятельности чувств и чувственных представлений к уже больше не извне данному духовному содержанию? Математика, если воспринимать ее с педагогической точки зрения, является воспитателем духа. Как ни один другой предмет, она способна дать молодому человеку уверенность, что в его внутреннем, исходя из его прадеятельности, может быть создано об'ективное содержание мира, которое никогда не приходит к нам пассивно извне, как, например, цвет или звук. Это содержание четко очерчено и открывается при понимании закономерностей внешнего мира как его обширность. Полученное исключительно внутреннее делает возможной для нас связь с об'ективными законами мира. Известный антропософский математик Л.Лохер-Эрнст называл математику "подготовительным этапом" к духовному познанию. И там, где мы воздействуем на конституцию ребенка, имеющую слабые стороны, от нашего взора не должна ускользать эта великая цель, что духовное бытие зажигается в бытии земном!

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ИГРЫ С ЧИСЛАМИ.

Эрнст Бюлер, Биль.

Дети выстраиваются и считают.

Все:

- Мы - первый класс, мы играем в игру с числами.

Катрин выходит вперед:

- Я - единица, - целое, во мне есть все, - круглая я и красивая.

Томас и Харальд выходят вперед:

- Мы - двойки, мы - больше, чем ты, мы - два друга.

Все:

- Да, вы - два друга, но вы - одна пара.

Ирис, Отто и Бенжамин выход т вперед:

- Нас трое, нас больше, чем вас, мы - папа, мама и ребенок.

Все:

- Да, вас трое, но вы только одна семья.

Анна, Флориан, Сон и Кол выход и вперед:

- Мы - четыре ветра, нас больше всех.

Красный ветер:

- Я - северный ветер.

Синий ветер:

- Я - восточный ветер.

Зеленый ветер:

-Я - южный ветер.

Желтый ветер:

- Я - западный ветер.

Все:

- Да, вы - четыре ветра, но вы из одного воздуха.

Михаэль, Этель, Люци , Жасмин и Юдит выходят вперед:

- Мы - Роза, нас больше чем вас, 1, 2, 3, 4, 5, у нас пять лепестков.

Все:

- Да, вы - пять лепестков розы, но вы - только одна роза. Кристоф, Флориан, Кевин, Матиас, Маркус и Даниэль выходят вперед:

- Мы - шесть сторон кристалла, нас больше чем вас, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Все:

- Да, вы шесть сторон кристалла, но только один кристалл. Кармен, Ирис, Николь, Рафаэль, -жессика, Лариса и Биргит выходят:

- Мы - семь дней недели, нас больше чем вас. Понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье.

Понедельник качает головой,
Это - настоящий брюзга.
Вторник - мужественный герой,
И миром воспевается всегда.
А вот и среда прибегает
И всех детей с собой забирает.
Каждый ребенок читает вслух
Свой стишок господину Четвергу.
Пятница сплетает красивый венец
И приглашает невесту на свадебный танец.
Суббота к отдыху нас призывает
И домик недели на ключ запирает.
Воскресенье - солнца сын,
Золотую корону носит один.

Все:

- Да, вы - семь дней, но только одна неделя.

Даниэль выходит вперед:

- Я - нуль, великий волшебник, к кому я прикасаюсь, тот превращается в: 10 20, 30, 40, 50, 60, 70.

Все:

- Нашу с числами игру гости посмотрели,
9 и 8 в ней не нашли?! Не огорчайтесь!
У нас все впереди.
Быстро, весело и бодро
Мы считаем числа
И назад, и вперед, и вверх, и вниз:
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.

СЧЕТНАЯ ИГРА ДЛЯ ПЕРВОГО КЛАССА

Дети выходят, считая: 1, 2, 3, ... и становятся перед классом.

Все:

- Мы первый класс,
считаем для вас
по одному и хором.

Определенное число детей (например, 6, 12 или 24) выходят вперед и образуют круг. Остальные дети в классе хором говорят вместе с детьми, которые стоят в круге.

Все:

- Вот мир наш зарождается
И Богом осмысляется.

Дети берутся за руки и двигаются по кругу.

- Бог день и ночь раз'единяет
И "2" при этом возникает.

Из одного круга дети образуют два.

- Бог, полный радости, взглянул
На то хорошее, что сделал.
Людей Он также сотворил.
Они увидели Его, себя и мир,
Почувствовали *три в одном*, едином,
С людьми, цветами,
Животными, камнями.

Три круга при этом образуют цветок с тремя лепестками. Затем снова становятся вместе и говорят публике.

Все:

- Три первых числа показали мы.
Есть много еще - это знаете вы.
Сейчас мы вам изобразим
4 и 5, 6, 7, 8.

Дети показывают числа от 4 до 8 с помощью характерных позиций. Учитель называет при этом громко соответствующее число. При 6, 7, 8 два ученика стоят друг за другом и с помощью положений рук и ног изображают числа.

- Мы числа вам произнесем
То громко, то тихо нашим хором.

Учитель называет числа только от 1 до 5. Дети идут по кругу, топая, и при этом громко считают: 1, 2, 3!, 1, 2, 3!,... или 1, 2!, 1, 2!,... и т.д. Нужные числа выделяются. Ритм может подчеркиваться с помощью тамбурина или треугольника.

Все:

- Но чисел много есть у нас,
Мы знаем их и считаем для вас:
1, 2, 3, ...

Дети хором считают от 1 до 20 и наоборот, громко или тихо, в зависимости от того, какой знак рукой подаст учитель. При этом хор сменяется счетом отдельных учеников, на которых показывает учитель.

Все:

- Разные виды счета известны нам,
Еще один способ покажем мы вам.

Пятеро учеников выходят вперед и выстраиваются в форме пятиугольника.

Все:

- Мы - круг из чисел 1, 2, 3, 4, 5,
Но можем мы разделиться опять.

Дети делятся на группы, например, 2 + 2 + 1 и т.д., класс говорит громко в той последовательности, в какой учитель показывает на группы, например:

5 - это 2 + 1 + 2

(*и соответственно при других группировках*)

Все:

- Мы и другие числа можем разделять,
Как поделили мы наше число 5.
Мы идем -

(*дети формируют ряд и считают при этом, топая*)

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24.

(*затем возвращаются назад*)

24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2.
И приходим опять.
Сейчас в нашем хоре услышите вы
Попеременно числа 2 и 3.

Класс выходит, выделяя ногами соответствующие числа: 1, 2!, 1, 2, 3!, 1, 2!, 1, 2, 3!. При этом можно на счет 1, 2 можно также двигаться назад.

Э.Шуберт

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рудольф Штейнер о введении арифметических действий в связи с детскими темпераментами. (Из: Искусство воспитания. Семинарские обсуждения и доклады об учебном плане. Библ., N 295, доклад 4.)

Давайте начнем со сложения, а именно с того, как мы понимаем сложение. Допустим, у меня есть несколько фасолин или горсть ягод бузины. Возьмем для сегодняшнего случая тот вариант, что дети уже умеют считать, а не тот, что они только учатся это делать. Ребенок считает, вот он дошел до 27. "27"- говорю, "это сумма". Мы идем от суммы, а не от слагаемых! О психологическом значении этого Вы можете прочитать в моей теории познания[29]. Теперь эту сумму мы делим на слагаемые, на части и кучки. Одну кучку год, скажем 12 штук, потом еще одну, скажем из 3 , затем еще одну, скажем из 5. Так, наши ягоды иссякли: 27 = 12 + 7 + 3 + 5. Мы совершаем процесс вычисления из суммы 27. Подобный процесс я просил бы проделать детей, имеющих выраженный *флегматический темперамент*. Постепенно Вы осознаете, что этот вид сложения особенно присущ флегматикам. Затем, ибо процесс нужно проследить и в обратном порядке, я бы вызвал детей-холериков, попросив вновь соединить ягоды, но именно по порядку, как мы распределили до этого: 5 и 3 и 7 и 12 - 27. Итак, ребенок-холерик совершает *обратный процесс. Сложение - в первую очередь способ вычисления для детей-флегматиков.* Ну а сейчас я бы взял кого-нибудь с *меланхолическим темпераментом.* Ему я сказал бы: "Вот горстка ягод, сосчитай их". Он берет, ну, например, 8. Я - "Видишь ли, я не хочу 8 ягод, я хочу только 3. Сколько нужно убрать из кучки ягод, чтобы у меня осталось только 3?" Он придет к тому, что нужно убрать 5. *Вычитание* в такой форме является прежде всего способом вычисления для детей-меланхоликов. И тут я вызвал бы *сангвиника* и предложил бы сделать вычитание в *обратном* порядке. Я сказал бы: "Сколько было взято ягод?" И продолжаю: "Если я 5 отнимаю от 8, то у меня останется 3".- Т.е. ребенку-сангвинику предлагаю произвести обратную операцию. Но хочу сказать, что вычитание "предпочтительно"- но именно так, как мы это делали - для детей-меланхоликов.

Так, возьмем ребенка из группы *сангвиников.* Я снова бросаю какое-то количество ягод, но смотрю, чтобы оно подходило. Я

29. Рудольф Штейнер, Основные направления теории познания мировоззрения Гете, доклад 2-й, Дорнах 1979 ,а также Истина и наука, доклад 3-й, Дорнах 1980

должен на это обратить внимание, иначе мы перейдем к дробям, не правда ли ? Я прошу сосчитать: 56 ягодок. "Посмотри, я взял 8 ягод. Ты мне должен сказать, сколько раз 8 ягодок встретится 56". Вы видите, *умножение* приводит к делению. Ребенок получает число 7. Затем прошу *ребенка - меланхолика* сделать обратное и говорю: "Я хочу сейчас понять не сколько раз 8 содержится в 56, а сколько раз 7 встречается в 56?" Т.е. обратное действие я прошу выполнить представителя противоположного темперамента.

Холерику предлагаю вначале *деление*, от небольших чисел к большим, говоря: "Смотри, у тебя кучка из 8 годок. Я хочу от тебя узнать, в каком числе 8 содержится семь раз". Затем прошу сделать *обратное*, обычное деление, ребенка с *флегматическим темпераментом*. Эту форму деления я применяю для детей-холериков. Так как подобная форма является предпочтительным методом вычисления для холериков.

Таким образом, я продемонстрировал, как мы получаем возможность привлечь четыре темперамента для четырех арифметических действий: сложение свойственно флегматическому темпераменту, вычитание - меланхолическому, умножение - сангвиническому, деление с возвращением к делимому - холерическому темпераменту[30]...

Очень важно, что можно работать без скуки: это не то, что полгода дети только складывают, потом вычитают и т.д., мы проходим эти четыре арифметических действия, по возможности, не слишком медленно, последовательно друг за другом и тренируем *все* четыре ! Вначале где-то до 40. Мы учим счету не по обычному учебному плану, а таким образом, чтобы все четыре действия посредством упражнений усваиваивались бы почти одновременно. Вы почувствуете, что такой способ очень экономичен, к тому же детям предлагается возможность проработать вещь изнутри. Ведь деление родственно сложению, а умножение есть, собственно говоря, многократное сложение. Так можно осуществлять преобразования и подвести, например, холерика к вычитанию.

30. Здесь следует обратить внимание на то, что называет Рудольф Штейнер арифметическими действиями. Схема на стр.40 располагает постановки задач Рудольфа Штейнера в общей схеме арифметических действий.

ЛИТЕРАТУРА:

Гриссман Х / Вебер А. Особые нарушения при счете. Диагностика и терапия. Изд-во Ханс Хубер, Берн, 1982

Юннеман М. и др. Рисование форм. Развитие в воспитании чувства формы. Штутгарт, 1992

Краних Е.-М. Раннее математическое воспитание в до- школьном возрасте как педагогико-психологическая проблема. В: Швейцарский детский сад, 3/1970.
также: Математика в дошкольном возрасте. В: Искусство воспитания. Штутгарт 2/1975.
также: Силы физического формообразования и их превращение в способность создавать и переживать формы. В: Юннеман М. и др. Рисование форм. Штутгарт, 1992.

Лурия А. Работающий мозг. Лондон, 1973

Вайншенк Ц. Нарушения в счете. Их диагностика и терапия. Изд-во Ханс Хубер, Берн, 1970.

Штейнер Р. Истина и наука. Библ. номер 2
также: Основные направления теории познания и мировоззрения Гете. Библ. номер 3.
также: Воспитание ребенка с точки зрения духовной науки. В: Библ. номер 34.
также: Мир, земля и человек, их сущность и развитие, 11 докладов, Штутгарт, 4-16.8.1908, Библ. номер 105.
также: Всеобщая антропология как основа педагогики. Библ. номер 293.
также: Искусство воспитания. Семинарские обсуждения и доклады по учебному плану. Библ. номер 295.
также: Искусство воспитания с точки зрения человеческой сущности. Библ. номер 311.
также: Мировая история в антропософском освещении и как основа познания духа человека. Библ. номер 233.

Лохер-Эрнст Л. Математика как подготовительный этап для духовного познания. Дорнах
также: Арифметика и алгебра. Дорнах, 1984

Матурана Х. / Варела Ф. Древо познания. Берн, Мюнхен, Вена, 1987

Пьяже И. Психология интеллекта. Ольтен и Фрайбург, 1974

Шуберт Э. Модернизация преподавания математики. Штутгарт, 1971
также: Воспитание в компьютерном обществе. Штутгарт, 1990
также: Геометрические и антропологические основы рисования форм. В: Юннеман и др. Рисование форм. Развитие чувства формы в воспитании. Штутгарт, 1992

ССЫЛКИ:

1. Обширный, однако не новейший перечень математической литературы антропософских авторов можно найти в книгах: Э.Шуберт. Вальдорфская педагогика.
Дитер Фолк. Критические замечания по поводу преподавания математики. Мюнхен, 1979

2. Обзор учебного плана по математике с 1 по 3 класс Свободных Вальдорфских школ появился в 1984 году при педагогическом исследовательском учереждении в Штутгарте. Имеется у автора.

3. Обширное собрание высказываний Р. Штейнера о математике и преподавании этого предмета составляется У.Кильтхау для Союза Свободных Вальдорфских школ.